# Devoir à la maison n°2

À rendre le mercredi 27 septembre 2023

Dans toute la suite, on considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}.$$

On définit le commutant de $A$, noté $C(A)$, comme l'ensemble des matrices de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ qui commutent avec $A$ i.e.

$$C(A) = \{M \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \mid AM = MA\}.$$

**1.** Montrer que $C(A)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

**2.** **a.** Justifier que $I_2 \in C(A)$ et que $A \in C(A)$ mais que $E_{1,1} \notin C(A)$.

**b.** Montrer que la famille $(I_2, A)$ est libre.

**c.** Déduire des questions précédentes que $\dim(C(A))$ est égale à 2 ou à 3.

**3.** Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in C(A)$.

**a.** Calculer explicitement $AM$ et $MA$ en fonction de $a$, $b$, $c$ et $d$.

**b.** En déduire que $\begin{cases} b = 2c \\ d = a - 4c \end{cases}$.

**c.** Déterminer une famille génératrice de $C(A)$ et en déduire que $\dim(C(A)) = 2$.

**d.** Conclure que $C(A) = \mathrm{Vect}(I_2, A)$.

**4.** On appelle bicommutant de $A$, et on note $C(C(A))$, l'ensemble des matrices qui commutent à toute matrice de $C(A)$. Autrement dit,

$$C(C(A)) = \{M \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \mid \forall N \in C(A),\ MN = NM\}.$$

**a.** Montrer que $C(C(A))$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

**b.** Montrer que $C(C(A)) \subset C(A)$.

**c.** Montrer que $I_2$ et $A$ appartiennent à $C(C(A))$.

**d.** Conclure que $C(C(A)) = C(A)$.

**Solution.**

**1.** Par définition, $C(A) \subset \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$. De plus $A \times 0_2 = 0_2 = 0_2 \times A$ donc $0_2 \in C(A)$.
Soit $M_1$ et $M_2$ deux éléments de $C(A)$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors,

$$(\lambda M_1 + M_2)A = \lambda M_1 A + M_2 A = \lambda A M_1 + A M_2 = A(\lambda M_1 + M_2)$$

donc $\lambda M_1 + M_2 \in C(A)$. Ainsi, on conclut que $\boxed{C(A) \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathscr{M}_2(\mathbb{R})}$.

**2. a.** Par propriété, $I_2 \times A = A = A \times I_2$ donc $\boxed{I_2 \in C(A)}$ et $A \times A = A \times A$ donc $\boxed{A \in C(A)}$.
De plus, $E_{1,1} \times A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $A \times E_{1,1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ donc $A \times E_{1,1} \neq E_{1,1} \times A$ et ainsi $\boxed{E_{1,1} \notin C(A)}$.

**b.** Soit $a$ et $b$ deux réels tels que $aI_2 + bA = 0_2$. Alors, $\begin{pmatrix} a+b & -2b \\ -b & a+5b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ donc, particulier, $a+b=0$ et $-2b=0$. Il s'ensuit que $b=0$ et donc $a=0$. Ainsi, $a=b=0$ donc $\boxed{(I_2, A) \text{ est libre}}$.

**c.** Comme $(I_2, A)$ est une famille libre de 2 vecteurs de $C(A)$, $\dim(C(A)) \geqslant 2$. De plus, $C(A)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ donc $\dim(C(A)) \leqslant \dim(\mathscr{M}_2(\mathbb{R})) = 4$. Si $\dim(C(A)) = 4$ alors, par théorème, $C(A) = \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$. Or, $E_{1,1} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ mais $E_{1,1} \notin C(A)$. Ainsi, $\dim(C(A)) \neq 4$ et donc on conclut donc que $\boxed{\dim(C(A)) \in \{2\,;3\}}$.

**3. a.** Par définition,

$$AM = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-2c & b-2d \\ -a+5c & -b+5d \end{pmatrix}$$

et

$$AM = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-b & -2a+5b \\ c-d & -2c+5d \end{pmatrix}$$

**b.** En égalant les termes d'indices 1 et 1, on en déduit que $a-2c = a-b$ donc $b = 2c$ et, en égalant les termes d'indice 2 et 1, on en déduit que $-a+5c = c-d$ donc $d = a-4c$.
Ainsi, on a bien $\boxed{\begin{cases} b = 2c \\ d = a-4c \end{cases}}$.

**c.** On en déduit que

$$M = \begin{pmatrix} a & 2c \\ c & a-4c \end{pmatrix} = aI_2 + b\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}$$

donc $\boxed{\left(I_2, \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}\right) \text{ est une famille génératrice de } C(A)}$. Il s'ensuit que $\dim(C(A)) \leqslant 2$ et donc, par la question **2.a.**, $\boxed{\dim(C(A)) = 2}$.

**d.** Comme $(I_2, A)$ est une famille libre de 2 vecteurs de $C(A)$ et comme $\dim(C(A)) = 2$, par théorème, $(I_2, A)$ est une base de $C(A)$. En particulier, $\boxed{C(A) = \operatorname{Vect}(I_2, A)}$.

**4. a.** Par définition, $C(C(A)) \subset \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$. De plus, pour tout $N \in C(A)$, $0_2 \times N = 0_2 = N \times 0_2$ donc $0_2 \in C(C(A))$.
Soit $M_1$ et $M_2$ deux éléments de $C(A)$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors, pour tout $N \in C(A)$,

$$(\lambda M_1 + M_2)N = \lambda M_1 N + M_2 N = \lambda N M_1 + N M_2 = N(\lambda M_1 + M_2)$$

donc $\lambda M_1 + M_2 \in C(C(A))$ et, ainsi, $\boxed{C(C(A)) \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathscr{M}_2(\mathbb{R})}$.

**b.** Soit $M \in C(C(A))$. Alors, pour tout $N \in C(A)$, $MN = NM$. Or, on a vu que $A \in C(A)$ donc, en particulier, $MA = AM$ et ainsi $M \in C(A)$. On conclut que $\boxed{C(C(A)) \subset C(A)}$.

**c.** Soit $N \in C(A)$. Alors, d'une part, $I_2 \times N = N = N \times I_2$ donc $I_2 \in C(C(A))$. D'autre part, comme $N \in C(A)$, par définition, $NA = AN$ donc $A \in C(C(A))$. Ainsi, $\boxed{I_2 \text{ et } A \text{ appartiennent à } C(C(A))}$.

**d.** Comme $(I_2, A)$ est une famille libre de $C(C(A))$, on déduit de la question précédente que $\dim(C(C(A)) \geqslant 2$. Or, $C(C(A)) \subset C(A)$ donc $\dim(C(C(A)) \leqslant \dim(C(A)) = 2$ et, finalement, $\dim(C(C(A))) = 2 = \dim(C(A))$. Sachant que $C(C(A))$ est un sous-espace vectoriel de $C(A)$, on conclut que $\boxed{C(C(A)) = C(A)}$.