Devoir à la maison n°2

À rendre le mercredi 27 septembre 2023

Dans toute la suite, on considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}.$$

On définit le commutant de A, noté $C(A)$, comme l'ensemble des matrices de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ qui commutent avec A i.e.

$$C(A) = \{M \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \mid AM = MA\}.$$

1. Montrer que $C(A)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

2. **a.** Justifier que $I_2 \in C(A)$ et que $A \in C(A)$ mais que $E_{1,1} \notin C(A)$.

b. Montrer que la famille (I_2, A) est libre.

c. Déduire des questions précédentes que $\dim(C(A))$ est égale à 2 ou à 3.

3. Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in C(A)$.

a. Calculer explicitement AM et MA en fonction de a, b, c et d.

b. En déduire que $\begin{cases} b = 2c \\ d = a - 4c \end{cases}$.

c. Déterminer une famille génératrice de $C(A)$ et en déduire que $\dim(C(A)) = 2$.

d. Conclure que $C(A) = \mathrm{Vect}(I_2, A)$.

4. On appelle bicommutant de A, et on note $C(C(A))$, l'ensemble des matrices qui commutent à toute matrice de $C(A)$. Autrement dit,

$$C(C(A)) = \{M \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \mid \forall N \in C(A),\ MN = NM\}.$$

a. Montrer que $C(C(A))$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

b. Montrer que $C(C(A)) \subset C(A)$.

c. Montrer que I_2 et A appartiennent à $C(C(A))$.

d. Conclure que $C(C(A)) = C(A)$.