Devoir à la maison n°1

À rendre le mercredi 23 septembre 2026

Dans $\mathbb{R}_3[X]$, on considère les deux ensembles suivants :

$$F = \{P \in \mathbb{R}_3[X] \mid P(1) = P'(1) = 0\}$$

et

$$G = \{(a+b)X^3 + (a-4b)X^2 + 5(b-a)X + 3a - 2b \mid (a,b) \in \mathbb{R}^2\}.$$

1. On considère les polynômes

$$P_1 = X^2 - X, \qquad P_2 = X^2 - 2X + 1 \qquad \text{et} \qquad P_3 = X^3 - X^2 - X + 1.$$

Déterminer, en justifiant, si ces polynômes appartiennent à F.

2. **a.** Montrer que G est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_3[X]$ et en déterminer une base $\mathcal{B}$.

b. En déduire la dimension de G.

3. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_3[X]$.

4. **a.** Justifier que $G \subset F$. Que peut-on en déduire concernant la dimension de F ?

b. Justifier que $F \neq \mathbb{R}_3[X]$. Que peut-on en déduire concernant la dimension de F ?

c. Au vu des deux questions précédentes, quelles sont les dimensions possibles pour F ?

5. **a.** Soit $P \in F$. Justifier, à l'aide du cours de 1ère année sur les polynômes, qu'il existe deux réels λ et μ tels que $P = (X-1)^2(\lambda X + \mu)$.

b. Déduire de la question précédente que $F \subset \text{Vect}((X-1)^2, X(X-1)^2)$.

c. En déduire la dimension de F.

d. Conclure que $F = G$.

6. **a.** Déterminer la matrice A de la famille (P_2, P_3) dans la base $\mathcal{B}$.

b. Sans calcul, déterminer le rang de A.

Solution.

1. Comme $P_1' = 2X - 1$, $P_1'(1) = 1 \neq 0$ donc $\boxed{P_1 \notin F}$.
D'une part, $P_2(1) = 1^2 - 2 \times 1 + 1 = 0$ et, d'autre part, $P_2' = 2X - 2$ donc $P_2'(1) = 0$. Ainsi, $\boxed{P_2 \in F}$.
D'une part, $P_3(1) = 1^3 - 1^2 - 1 + 1 = 0$ et, d'autre part, $P_3' = 3X^2 - 2X - 1$ donc $P_3'(1) = 3 \times 1^2 - 2 \times 1 - 1 = 0$. Ainsi, $\boxed{P_3 \in F}$.

2. **a.** On remarque que

$$\begin{aligned} G &= \{aX^3 + bX^3 + aX^2 - 4bX^2 + 5bX - 5aX + 3a - 2b \mid (a,b) \in \mathbb{R}^2\} \\ &= \{a(X^3 + X^2 - 5X + 3) + b(X^3 - 4X^2 + 5X - 2) \mid (a,b) \in \mathbb{R}^2\} \\ &= \text{Vect}(Q_1, Q_2) \end{aligned}$$

en posant $Q_1 = X^3 + X^2 - 5X + 3$ et $Q_2 = X^3 - 4X^2 + 5X - 2$. Ainsi, on conclut que $\boxed{G \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathbb{R}_3[X]}$.
De plus, (Q_1, Q_2) est une famille génératrice de G et le deux vecteurs Q_1 et Q_2 ne sont pas colinéaires (car ils ont tous les deux unitaires donc ils ne peuvent être colinéaires que s'ils sont égaux) donc ils forment une famille libre. On conclut que la famille $\boxed{\mathcal{B} = (Q_1, Q_2) \text{ est une base } G}$.

b. Comme $\mathcal{B}$ est constitué de 2 vecteurs, $\boxed{\dim(G) = 2}$.

3. Tout d'abord, on remarque que $F \subset \mathbb{R}_3[X]$.
Ensuite, si P est le polynôme nul alors P' aussi donc $P(1) = P'(1) = 0$. Ainsi, $0_{\mathbb{R}_3[X]} \in F$.
Soit $(P, Q) \in F^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors, par définition,

$$(\lambda P + Q)(1) = \lambda P(1) + Q(1) = \lambda \times 0 + 0 = 0$$

car F et Q sont dans F. De plus, $(\lambda P + Q)' = \lambda P' + Q'$ donc

$$(\lambda P + Q)'(1) = (\lambda P' + Q')(1) = \lambda P'(1) + Q'(1) = \lambda \times 0 + 0$$

car P et Q sont dans F. Ainsi, $\lambda P + Q \in F$.
On conclut donc que $\boxed{F \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathbb{R}_3[X]}$.

4. **a.** On remarque que $Q_1(1) = 1^3 + 1^2 - 5 \times 1 + 3 = 0$ et $Q_2(1) = 1^3 - 4 \times 1 + 5 \times 1 - 2 = 0$. De plus, $Q_1' = 3X^2 + 2X - 5$ et $Q_2' = 3X^2 - 8X + 5$ donc $Q_1'(1) = 3 \times 1^2 + 2 \times 1 - 5 = 0$ et $Q_2'(1) = 3 \times 1^2 - 8 \times 1 + 5 = 0$ donc Q_1 et Q_2 appartiennent à F. Il s'ensuit que $\text{Vect}(Q_1, Q_2) \subset F$ i.e. $\boxed{G \subset F}$. On en déduit que $\dim(F) \geqslant \dim(G)$ i.e. $\boxed{\dim(F) \geqslant 2}$.

b. On a vu en question **1.** que $P_1 \in \mathbb{R}_3[X]$ mais $P_1 \notin F$ donc $F \neq \mathbb{R}_3[X]$. On en déduit que $\dim(F) < \dim(\mathbb{R}_3[X])$ i.e. $\boxed{\dim(F) < 4}$.

c. Comme $\dim(F)$ est un entier, on conclut que $\boxed{\dim(F) \in \{2\,;3\}}$.

5. **a.** Comme $P \in F$, $P(1) = P'(1) = 0$ donc 1 est une racine multiple de P. Ainsi, P se factorise par $(X-1)^2$ et, comme P est de degré au plus 3, cela signifie qu'il existe un polynôme Q de degré au plus 1 tel que $P = (X-1)^2 Q$. Ainsi, il existe deux réels λ et μ tel que $Q = \lambda X + \mu$ i.e. $\boxed{P = (X-1)^2(\lambda X + \mu)}$.

b. D'après la question précédente, si $P \in F$ alors il existe deux réels λ et μ tels que

$$P = (X-1)^2(\lambda X + \mu) = \lambda X(X-1)^2 + \mu(X-1)^2$$

donc $P \in \text{Vect}(X(X-1)^2, (X-1)^2)$. Ceci est vrai pour tout vecteur P de F donc $\boxed{F \subset \text{Vect}(X(X-1)^2, (X-1)^2)}$.

c. Comme $\text{Vect}(X(X-1)^2,(X-1)^2)$ est engendré par 2 vecteur, sa dimension est au plus 2 donc $\dim(F)\leqslant 2$. On déduit alors de la question **4.c.** que $\boxed{\dim(F)=2}$.

d. On a vu que $G\subset F$ et que $\dim(F)=2=\dim(G)$ donc, par propriété, $\boxed{F=G}$.

6. a. On cherche des réels a et b tels que $P_1=aQ_1+bQ_2$. Or, par définition,

$$\begin{aligned} aQ_1+bQ_2 &= a(X^3+X^2-5X+3)+b(X^3-4X^2+5X-2)\\ &= (a+b)X^3+(a-4b)X^2+5(b-a)+3a-2b \end{aligned}$$

donc

$$P_1=aQ_1+bQ_2 \iff \begin{cases} a+b=0\\ a-4b=1\\ 5(b-a)=-2\\ a-2b=1 \end{cases} \iff \begin{cases} b=-a\\ a-4(-a)=1\\ 5(-a-a)=-2\\ 3a-2(-a)=1 \end{cases} \iff \begin{cases} b=-\frac{1}{5}\\ a=\frac{1}{5} \end{cases}.$$

De même pour P_2,

$$P_2=aQ_1+bQ_2 \iff \begin{cases} a+b=1\\ a-4b=-1\\ 5(b-a)=-1\\ a-2b=1 \end{cases} \iff \begin{cases} b=1-a\\ a-4(1-a)=-1\\ 5(1-a-a)=-1\\ 3a-2(1-a)=1 \end{cases} \iff \begin{cases} b=-\frac{2}{5}\\ a=\frac{3}{5} \end{cases}.$$

On en déduit que

$$\boxed{A=\begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{3}{5}\\ -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix}}.$$

b. Comme P_2 et P_3 ne sont pas de même degré, ils ne sont pas colinéaires donc forment une famille libre de F. Comme $\dim(F)=2$, il s'ensuit que (P_2,P_3) est une base de F. Or, par propriété, $\text{rg}(A)=\dim(\text{Vect}(P_2,P_3))$ donc $\text{rg}(A)=\dim(F)$ i.e. $\boxed{\text{rg}(A)=2}$.