

Devoir à la maison n°1

À rendre le mercredi 23 septembre 2026

Dans $\mathbb{R}_3[X]$, on considère les deux ensembles suivants :

$$F = \{P \in \mathbb{R}_3[X] \mid P(1) = P'(1) = 0\}$$

et

$$G = \{(a+b)X^3 + (a-4b)X^2 + 5(b-a)X + 3a - 2b \mid (a,b) \in \mathbb{R}^2\}.$$

1. On considère les polynômes

$$P_1 = X^2 - X, \quad P_2 = X^2 - 2X + 1 \quad \text{et} \quad P_3 = X^3 - X^2 - X + 1.$$

Déterminer, en justifiant, si ces polynômes appartiennent à F .

2.
 - a. Montrer que G est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_3[X]$ et en déterminer une base $\mathcal{B}$.
 - b. En déduire la dimension de G .
3. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_3[X]$.
4.
 - a. Justifier que $G \subset F$. Que peut-on en déduire concernant la dimension de F ?
 - b. Justifier que $F \neq \mathbb{R}_3[X]$. Que peut-on en déduire concernant la dimension de F ?
 - c. Au vu des deux questions précédentes, quelles sont les dimensions possibles pour F ?
5.
 - a. Soit $P \in F$. Justifier, à l'aide du cours de 1ère année sur les polynômes, qu'il existe deux réels λ et μ tels que $P = (X-1)^2(\lambda X + \mu)$.
 - b. Déduire de la question précédente que $F \subset \text{Vect}((X-1)^2, X(X-1)^2)$.
 - c. En déduire la dimension de F .
 - d. Conclure que $F = G$.
6.
 - a. Déterminer la matrice A de la famille (P_2, P_3) dans la base $\mathcal{B}$.
 - b. Sans calcul, déterminer le rang de A .