Devoir à la maison n°1

À rendre le mercredi 17 septembre 2025

On considère les suites (a_n) et (b_n) définies par leurs premiers termes $a_0 = 0$ et $b_0 = 1$ et par les relations de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad a_{n+1} = 2a_n + b_n \quad \text{et} \quad b_{n+1} = 2b_n.$$

1. Déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, une expression explicite de b_n en fonction de n.

2. On définit la suite (c_n) par : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $c_n = \dfrac{a_n}{2^n}$.

- **a.** Justifier que (c_n) est une suite arithmétique de raison $\dfrac{1}{2}$ et déterminer son premier terme.
- **b.** En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, une expression explicite de c_n en fonction de n.
- **c.** Déduire des questions précédentes, pour tout $n \in \mathbb{N}$, une expression explicite de a_n en fonction de n.

3. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} k2^{k-1}$.

- **a.** Justifier que, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$a_k = a_{k+1} - a_k - 2^k.$$

- **b.** Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} 2^k$.
- **c.** Déduire des questions précédentes que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$S_n = (n-1)2^n + 1.$$

4. On se propose de retrouver le résultat de la question **3.c.** par une autre méthode.

- **a.** À l'aide d'un changement d'indice, justifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$S_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} (k+1)2^k.$$

- **b.** En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$S_{n+1} = 2S_n + \sum_{k=0}^{n} 2^k.$$

- **c.** En exprimant d'une autre façon S_{n+1} en fonction de S_n, retrouver le résultat de la question **3.c.**.

Solution.

1. Par définition, (b_n) est une suite géométrique de raison 2 et de premier termes $b_0 = 1$ donc, $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ b_n = 2^n}$.

2. **a.** Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors,

$$c_{n+1} - c_n = \frac{a_{n+1}}{2^{n+1}} - \frac{a_n}{2^n} = \frac{a_{n+1}}{2^{n+1}} - \frac{2 \times a_n}{2 \times 2^n} = \frac{a_{n+1} - 2a_n}{2^{n+1}}.$$

Or, par définition, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_{n+1} = 2a_n + b_n$ donc $a_{n+1} - 2a_n = b_n$ i.e. $a_{n+1} - 2a_n = 2^n$. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$c_{n+1} - c_n = \frac{2^n}{2^{n+1}} = \frac{2^n}{2 \times 2^n} = \frac{1}{2}.$$

On conclut que $\boxed{(c_n) \text{ est une suite arithmétique de raison } \frac{1}{2}}$. De plus, $c_0 = \frac{a_0}{2^0} = \frac{0}{1} = 0$ donc $\boxed{\text{le premier terme de } (c_n) \text{ est } c_0 = 0}$.

b. On en déduit que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $c_n = c_0 + n \times \frac{1}{2}$ i.e. $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ c_n = \frac{n}{2}}$.

Or, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$a_n = 2^n \times c_n = 2^n \times \frac{n}{2} = 2 \times 2^{n-1} \times \frac{n}{2} = 2^{n-1} \times n$$

donc, $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ a_n = n2^{n-1}}$.

3. **a.** Soit $k \in \mathbb{N}$. Alors, $a_{k+1} = 2a_k + b_k = a_k + a_k + 2^k$ donc, en soustrayant $a_k + 2^k$ aux deux membres de l'égalité, $a_{k+1} - (a_k + 2^k) = a_k$ i.e. $\boxed{a_k = a_{k+1} - a_k - 2^k}$.

b. Soit $n \in \mathbb{N}$. Comme $2 \neq 1$,

$$\sum_{k=0}^{n} 2^k = \frac{1 - 2^{n+1}}{1 - 2} = \frac{1 - 2^{n+1}}{-1} = -1 + 2^{n+1}.$$

Ainsi, $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ S_n = 2^{n+1} - 1}$.

c. Soit $n \in \mathbb{N}$. D'après la question 3.a.

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} k2^{k-1} = \sum_{k=0}^{n} a_k = \sum_{k=0}^{n}(a_{k+1} - a_k - 2^k) = \sum_{k=0}^{n}(a_{k+1} - a_k) - \sum_{k=0}^{n} 2^k.$$

Or, en reconnaissant une somme téléscopique,

$$\sum_{k=0}^{n}(a_{k+1} - a_k) = a_{n+1} - a_0 = (n+1)2^{n+1-1} - 0 = (n+1)2^n$$

et ainsi on déduit, en utilisant également le résultat de la question **3.b.**, que

$$S_n = (n+1)2^n - (2^{n+1} - 1) = (n+1)2^n - 2^{n+1} + 1 = (n+1) - 2 \times 2^n + 1 = (n+1-2)2^n + 1$$

i.e. $\boxed{S_n = (n-1)2^n + 1}$.

4. a. Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors, $S_{n+1} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n+1} k2^{k-1}$ et, comme le terme d'indice $k = 0$ est nul, $S_{n+1} = \displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} k2^{k-1}$. À l'aide d'un changement d'indice $j = k - 1$, on en déduit que $S_{n+1} = \displaystyle\sum_{j=0}^{n} (j+1)2^j$. Ainsi, $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ S_{n+1} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} (k+1)2^k}$.

b. Par linéarité de la somme, on déduit que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$S_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} (k2^k + 2^k) \sum_{k=0}^{n} k2^k + \sum_{k=0}^{n} 2^k = \sum_{k=0}^{n} k \times 2 \times 2^{k-1} + \sum_{k=0}^{n} 2^k = 2\sum_{k=0}^{n} k2^{k-1} + \sum_{k=0}^{n} 2^k$$

donc $\boxed{S_{n+1} = 2S_n + \displaystyle\sum_{k=0}^{n} 2^k}$.

c. Par ailleurs, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_{n+1} = S_n + (n+1)2^{n+1-1} = S_n + (n+1)2^n$. On déduit alors de la question précédente que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $2S_n + \displaystyle\sum_{k=0}^{n} 2^k = S_n + (n+1)2^n$ et donc $S_n = (n+1)2^n - \displaystyle\sum_{k=0}^{n} 2^k$. Or, on a vu en question **3.b.** que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} 2^k = 2^{n+1} - 1$ donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$S_n = (n+1)2^n - (2^{n+1} - 1) = (n+1)2^n - 2 \times 2^n + 1 = (n+1-2)2^n + 1$$

et on retrouve bien que, $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ S_n = (n-1)2^n + 1}$.