Devoir à la maison n°1 – Corrigé

Exercice 1. On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = (-1)^{n+1}(2n+1) - u_n.$$

1. a. Calculer u_1, u_2, u_3 et u_4.

b. Conjecturer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, une expression explicite de u_n en fonction de n.

2. On considère la suite (v_n) définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par $v_n = u_n - (-1)^n n^2$.

a. Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison.

b. En déduire une démonstration de la conjecture faite en question **1.b.**.

3. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_n = \displaystyle\sum_{j=0}^{n} u_j$.

a. Calculer S_0, S_1, S_2 et S_3.

b. Démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_n = (-1)^n \dfrac{n(n+1)}{2}$.

Solution.

1. a. D'après la relation de récurrence, $u_1 = u_{0+1} = (-1)^1(2 \times 0 + 1) - u_0 = -1 - 0$ donc $\boxed{u_1 = -1}$. De même, $u_2 = (-1)^2(2\times 1+1)-(-1)$ i.e. $\boxed{u_2 = 4}$, $u_3 = (-1)^3(2\times 2+1)-4$ i.e. $\boxed{u_3 = -9}$ et $u_4 = (-1)^4(2 \times 3 + 1) - (-9)$ i.e. $\boxed{u_4 = 16}$.

b. On peut conjecturer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = (-1)^n n^2$.

2. a. Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors,

$$\begin{aligned}
v_{n+1} &= u_{n+1} - (-1)^{n+1}(n+1)^2 \\
&= (-1)^{n+1}(2n+1) - u_n - (-1)^{n+1}(n^2+2n+1) \\
&= -u_n - (-1)^{n+1}n^2 \\
&= -\left(u_n + (-1)^{n+1}n^2\right) \\
&= -\left(u_n - (-1)^n n^2\right) \\
&= -v_n
\end{aligned}$$

donc $\boxed{\text{la suite } (v_n) \text{ est géométrique de raison } -1}$.

b. On en déduit que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = v_0(-1)^n$. Or, $v_0 = u_0 - (-1)^0 0^2 = 0 - 0 = 0$ donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = 0$. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n - (-1)^n n^2 = 0$ donc, $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = (-1)^n n^2}$.

3. a. On a $S_0 = u_0 = 0$, $S_1 = u_0 + u_1 = 0 + (-1) = -1$, $S_2 = u_0 + u_1 + u_2 = 0 + (-1) + 4 = 3$ et $S_3 = u_0 + u_1 + u_2 + u_3 = 0 + (-1) + 4 + (-9) = -6$.

b. Considérons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la proposition P_n : « $S_n = (-1)^n \frac{n(n+1)}{2}$ ».

- **Initialisation.** On a $S_0 = 0$ et $(-1)^0 \frac{0(0+1)}{2} = 0$ donc P_0 est vraie.
- **Hérédité.** Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que P_n est vraie. Alors, $S_n = (-1)^n \frac{n(n+1)}{2}$. Or, $S_{n+1} = S_n + u_{n+1}$ donc

$$\begin{aligned} S_{n+1} &= (-1)^n \frac{n(n+1)}{2} + (-1)^{n+1}(n+1)^2 \\ &= (-1)^n (n+1) \left[\frac{n}{2} - (n+1)\right] \\ &= (-1)^n (n+1) \frac{n - 2(n+1)}{2} \\ &= (-1)^n (n+1) \frac{-(n+2)}{2} \\ &= (-1)^{n+1} \frac{(n+1)(n+2)}{2} \end{aligned}$$

donc P_{n+1} est vraie.

- **Conclusion.** Par le principe de récurrence, on conclut que

$$\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ S_n = (-1)^n \frac{n(n+1)}{2}}.$$

Exercice 2. Soit $n \in \mathbb{N}$. On se propose dans cet exercice de calculer par des méthodes différentes de celles vues en première année les trois sommes $S_1 = \sum_{k=0}^{n} k$, $S_2 = \sum_{k=0}^{n} k^2$ et $S_3 = \sum_{k=0}^{n} k^3$.

1. En utilisant un changement d'indice par symétrie, montrer que $S_1 = \sum_{k=0}^{n} n - S_1$ puis en déduire la valeur de S_1.
2. **a.** Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $(k+1)^3 - k^3 = 3k^2 + 3k + 1$.

   b. En déduire que $3S_2 = \sum_{k=0}^{n} \left((k+1)^3 - k^3\right) - \sum_{k=0}^{n} (3k+1)$.

   c. Déterminer la valeur de S_2.
3. En raisonnant comme dans la question **1.**, montrer que $S_3 = \sum_{k=0}^{n} n^3 - 3n^2 S_1 + 3n S_2 - S_3$ puis en déduire la valeur de S_3.

Solution.

1. En utilisant un changement d'indice par symétrie puis la linéarité de la somme,

$$S_1 = \sum_{k=0}^{n} k \underset{j=n-k}{=} \sum_{j=0}^{n} (n-j) = \sum_{j=0}^{n} n - \sum_{j=0}^{n} j$$

i.e. $\boxed{S_1 = \sum_{k=0}^{n} n - S_1}$.

On en déduit que $2S_1 = \sum_{k=0}^{n} n = (n+1)n$ donc $\boxed{S_1 = \frac{n(n+1)}{2}}$.

2. **a.** Soit $k \in \mathbb{N}$. Alors, par la formule du binôme de Newton, $(k+1)^3 = k^3 + 3k^2 + 3k + 1$ donc $\boxed{(k+1)^3 - k^3 = 3k^2 + 3k + 1}$.

b. On en déduit que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $3k^2 = (k+1)^3 - k^3 - (3k+1)$ donc, par linéarité de la somme,

$$\sum_{k=0}^{n} 3k^2 = \sum_{k=0}^{n} (k+1)^3 - k^3 - (3k+1) = \sum_{k=0}^{n} \left((k+1)^3 - k^3\right) - \sum_{k=0}^{n} (3k+1).$$

Or, par linéarité de la somme, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} 3k^2 = 3\sum_{k=0}^{n} k^2 = 3S_2$ donc on conclut que

$$\boxed{3S_2 = \sum_{k=0}^{n} \left((k+1)^3 - k^3\right) - \sum_{k=0}^{n} (3k+1)}.$$

c. D'une part, en reconnaissant une somme téléscopique,

$$\sum_{k=0}^{n} \left((k+1)^3 - k^3\right) = (n+1)^3 - 0^3 = (n+1)^3$$

et, d'autre part, en reconnaissant une somme de termes consécutifs d'une suite arithmétique,

$$\sum_{k=0}^{n} (3k+1) = (n+1)\frac{(3 \times 0 + 1) + (3n+1)}{2} = \frac{(n+1)(3n+2)}{2}.$$

On déduit alors de la question **2.b.** que

$$\begin{aligned} 3S_2 = (n+1)^3 - \frac{(n+1)(3n+2)}{2} &= \frac{2(n+1)^3 - (n+1)(3n+2)}{2} \\ = \frac{(n+1)\left[2(n+1)^2 - (3n+2)\right]}{2} &= \frac{(n+1)(2(n^2+2n+1) - 3n - 2)}{2} \\ = \frac{(n+1)(2n^2+n)}{2} &= \frac{(n+1)n(2n+1)}{2} \end{aligned}$$

et on conclut que $\boxed{S_2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}}$.

3. En utilisant un changement d'indice par symétrie puis la linéarité de la somme,

$$\begin{aligned} S_3 = \sum_{k=0}^{n} k^3 \underset{j=n-k}{=} \sum_{j=0}^{n} (n-j)^3 &= \sum_{j=0}^{n} (n^3 - 3n^2 j + 3nj^2 - j^3) \\ &= \sum_{j=0}^{n} n^3 - 3n^2 \sum_{j=0}^{n} j + 3n \sum_{j=0}^{n} j^2 - \sum_{j=0}^{n} j^3 \end{aligned}$$

donc $\boxed{S_3 = \displaystyle\sum_{j=0}^{n} n^3 - 3n^3 S_1 + 3nS_2 - S_3}$.

Dès lors,

$$\begin{aligned}2S_3 &= (n+1)n^3 - 3n^2 S_1 + 3nS_2 = n^3(n+1) - 3n^2\frac{n(n+1)}{2} + 3n\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\\ &= n^2(n+1)\left[n - \frac{3n}{2} + \frac{2n+1}{2}\right] = n^2(n+1)\frac{n+1}{2}\end{aligned}$$

et ainsi $\boxed{S_3 = \dfrac{n^2(n+1)^2}{4}}$.

Exercice 3. Soit $n \in \mathbb{N}$. On souhaite calculer $S = \displaystyle\sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant n}} \min(i,j)$ (où $\min(i,j)$ désigne le plus petit des deux nombres i et j i.e. $\min(i,j) = j$ si $j \leqslant i$ et $\min(i,j) = i$ si $j > i$).

1. Justifier que $S = \displaystyle\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{i} j + \sum_{j=i+1}^{n} i\right)$.

2. En déduire que $S = \dfrac{2n+1}{2}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} i^2$.

3. Conclure. (On donnera le résultat sous forme factorisée).
Que remarque-t-on ?

Solution.

1. Soit $i \in [\![1, n]\!]$. Par la relation de Chasles,

$$\sum_{j=1}^{n}\min(i,j) = \sum_{j=1}^{i}\min(i,j) + \sum_{j=i+1}^{n}\min(i,j).$$

Or, si $j \leqslant i$ alors $\min(i,j) = j$ et, si $j \geqslant i+1$, $\min(i,j) = i$ donc

$$\sum_{j=1}^{n}\min(i,j) = \sum_{j=1}^{i} j + \sum_{j=i+1}^{n} i$$

et ainsi $\boxed{S = \displaystyle\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{i} j + \sum_{j=i+1}^{n} i\right)}$.

2. On en déduit que

$$S = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{i(i+1)}{2} + (n-i)i\right) = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{i^2 + i + 2ni - 2i^2}{2}\right) = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{(2n+1)i - i^2}{2}\right).$$

Dès lors, par linéarité, $\boxed{S = \dfrac{2n+1}{2}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} i^2}$.

3. On conclut que

$$S = \frac{2n+1}{2} \times \frac{n(n+1)}{2} - \frac{1}{2} \times \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = n(n+1)(2n+1)\left[\frac{1}{4} - \frac{1}{12}\right]$$

Soit finalement $\boxed{S = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}}$.

On remarque que $S = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^2$.