Devoir à la maison n°1

À rendre le mercredi 18 septembre 2024

Exercice 1. On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = (-1)^{n+1}(2n+1) - u_n.$$

1. **a.** Calculer u_1, u_2, u_3 et u_4.
   b. Conjecturer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, une expression explicite de u_n en fonction de n.
2. On considère la suite (v_n) définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par $v_n = u_n - (-1)^n n^2$.
   a. Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison.
   b. En déduire une démonstration de la conjecture faite en question **1.b.**.
3. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_n = \displaystyle\sum_{j=0}^{n} u_j$.
   a. Calculer S_0, S_1, S_2 et S_3.
   b. Démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_n = (-1)^n \dfrac{n(n+1)}{2}$.

Exercice 2. Soit $n \in \mathbb{N}$. On se propose dans cet exercice de calculer par des méthodes différentes de celles vues en première année les trois sommes $S_1 = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} k$, $S_2 = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^2$ et $S_3 = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^3$.

1. En utilisant un changement d'indice par symétrie, montrer que $S_1 = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} n - S_1$ puis en déduire la valeur de S_1.
2. **a.** Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $(k+1)^3 - k^3 = 3k^2 + 3k + 1$.
   b. En déduire que $3S_2 = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \left((k+1)^3 - k^3\right) - \sum_{k=0}^{n}(3k+1)$.
   c. Déterminer la valeur de S_2.
3. En raisonnant comme dans la question **1.**, montrer que $S_3 = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} n^3 - 3n^2 S_1 + 3n S_2 - S_3$ puis en déduire la valeur de S_3.

Exercice 3. Soit $n \in \mathbb{N}$. On souhaite calculer $S = \displaystyle\sum_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant n}} \min(i,j)$ (où $\min(i,j)$ désigne le plus petit des deux nombres i et j i.e. $\min(i,j) = j$ si $j \leqslant i$ et $\min(i,j) = i$ si $j > i$).

1. Justifier que $S = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{i} j + \sum_{j=i+1}^{n} i \right)$.
2. En déduire que $S = \dfrac{2n+1}{2} \displaystyle\sum_{i=1}^{n} i - \dfrac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} i^2$.
3. Conclure. (On donnera le résultat sous forme factorisée).
   Que remarque-t-on ?