Devoir à la maison n°1

À rendre le mercredi 13 septembre 2023

Exercice 1. On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = \frac{n+2}{2(n+1)} u_n.$$

1. Calculer u_1, u_2 et u_3.

2. La suite (u_n) est-elle arithmétique ? Est-elle géométrique ?

3. On définit la suite (v_n) par : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = \dfrac{u_n}{n+1}$.

a. Montrer que (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$.

b. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, en déduire l'expression de v_n puis celle de u_n en fonction de n.

Solution.

1. $u_1 = u_{0+1} = \dfrac{2}{2} u_0$ donc $\boxed{u_1 = 1}$, $u_2 = u_{1+1} = \dfrac{3}{4} u_1$ donc $\boxed{u_2 = \frac{3}{4}}$ et $u_3 = u_{2+1} = \dfrac{4}{6} u_2$ donc $\boxed{u_3 = \frac{1}{2}}$.

2. $u_1 - u_0 = 1 - 1 = 0$ et $u_2 - u_1 = \frac{3}{4} - 1 = -\frac{1}{4}$ donc $u_2 - u_1 \neq u_1 - u_0$ et ainsi $\underline{(u_n) \text{ n'est pas arithmétique}}$.

$\frac{u_1}{u_0} = \frac{1}{1} = 1$ et $\frac{u_2}{u_1} = \frac{\frac{3}{4}}{1} = \frac{3}{4}$ donc $\frac{u_2}{u_1} \neq \frac{u_1}{u_0}$ et ainsi $\underline{(u_n) \text{ n'est pas géométrique}}$.

3. **a.** Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors,

$$v_{n+1} = \frac{u_{n+1}}{n+1+1} = \frac{\frac{n+2}{2(n+1)} u_n}{n+2} = \frac{u_n}{2(n+1)} = \frac{1}{2}\left(\frac{u_n}{n+1}\right) = \frac{1}{2} v_n$$

donc $\boxed{(v_n) \text{ est une suite géométrique de raison } \frac{1}{2}}$.

b. Il s'ensuit que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = v_0 \times \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$. Or, $v_0 = \dfrac{u_0}{0+1} = 1$ donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\boxed{v_n = \left(\dfrac{1}{2}\right)^n}$. Dès lors, comme $u_n = (n+1)v_n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\boxed{u_n = (n+1)\left(\dfrac{1}{2}\right)^n = \dfrac{n+1}{2^n}}$.

Exercice 2. On définit la suite (t_n) par : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $t_n = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

1. Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $k^3 = t_k^2 - t_{k-1}^2$.

2. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$.

Solution.

1. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Alors,

$$\begin{aligned}
t_k^2 - t_{k-1}^2 &= \left(\frac{k(k+1)}{2}\right)^2 - \left(\frac{(k-1)k}{2}\right) = \frac{k^2(k+1)^2}{4} - \frac{(k-1)^2k^2}{4} \\
&= \frac{k^2}{4}\left[(k+1)^2 - (k-1)^2\right] \\
&= \frac{k^2}{4}\left[(k+1) - (k-1)\right]\left[(k+1) + (k-1)\right] \\
&= \frac{k^2}{4} \times 2 \times 2k \\
&= \frac{k^2}{4} \times 4k \\
&= k^3
\end{aligned}$$

donc on a bien $\boxed{t_k^2 - t_{k-1}^2 = k^3}$.

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On déduit de la question précédente, en reconnaissant une somme téléscopique, que

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \sum_{k=1}^{n}(t_k^2 - t_{k-1}^2) = t_n^2 - t_0^2 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 - 0^2 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

On a bien montrer que, $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N}^*,\ \sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}}$.

Exercice 3. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $S = \displaystyle\sum_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant n}} |i - j|$.

1. En utilisant la relation de Chasles, justifier que $S = \displaystyle\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{i-1}(i-j) + \sum_{j=i+1}^{n}(j-i)\right)$.

2. Soit un entier naturel i.

a. Montrer que $\displaystyle\sum_{j=1}^{i-1}(i-j) = \frac{i(i-1)}{2}$.

b. Montrer, de même, que $\displaystyle\sum_{j=i+1}^{n}(j-i) = \frac{(n-i)(n-i+1)}{2}$.

3. Justifier soigneusement que

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{(n-i)(n-i+1)}{2} = \sum_{i=1}^{n}\frac{i(i-1)}{2}.$$

4. Déduire des questions précédentes que $S = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} i^2 - \sum_{i=1}^{n} i$.

5. Conclure que $S = \dfrac{n(n^2-1)}{3}$.

1. D'après la relation de Chasles,

$$S = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} |i-j| = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{i-1} |i-j| + |i-i| + \sum_{j=i+1}^{n} |i-j|\right)$$

Or,

- si $j \in [\![1, i-1]\!]$ alors $j < i$ donc $|i-j| = i-j$;
- $|i-i| = |0| = 0$;
- si $j \in [\![i+1, n]\!]$ alors $j > i$ donc $|i-j| = j-i$.

On en déduit que $\boxed{S = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{i-1}(i-j) + \sum_{j=i+1}^{n}(j-i)\right)}$.

2. a. Par symétrie,

$$\sum_{j=1}^{i-1}(i-j) = \sum_{k=1}^{i-1} k$$

donc, par théorème, $\boxed{\sum_{j=1}^{i-1}(i-j) = \dfrac{i(i-1)}{2}}$.

b. De même,

$$\sum_{j=i+1}^{n}(j-i) = \sum_{\ell=1}^{n-i} \ell$$

donc $\boxed{\sum_{j=i+1}^{n}(j-i) = \dfrac{(n-i)(n-i+1)}{2}}$.

3. Toujours par le propriété de symétrie,

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{(n-i)(n-i+1)}{2} = \sum_{p=0}^{n-1} \frac{p(p+1)}{2}$$

et donc, pas le changement d'indice $i = p+1$, $\boxed{\sum_{i=1}^{n} \dfrac{(n-i)(n-i+1)}{2} = \sum_{i=1}^{n} \dfrac{i(i-1)}{2}}$.

4. Par linéarité, on déduit des questions précédentes que

$$S = 2\sum_{i=1}^{n} \frac{i(i-1)}{2} = \sum_{i=1}^{n} 2 \times \frac{i(i-1)}{2} = \sum_{i=1}^{n} i(i-1) = \sum_{i=1}^{n} i^2 - i$$

donc $\boxed{S = \sum_{i=1}^{n} i^2 - \sum_{i=1}^{n} i}$.

5. On déduit des propriétés du cours que

$$\begin{aligned}
S &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n+1)(2n+1) - 3n(n+1)}{6} \\
&= \frac{n(n+1)[(2n+1)-3]}{6} = \frac{n(n+1)(2n-2)}{6} = \frac{n(n+1) \times 2(n-1)}{6} \\
&= \frac{n(n+1)(n-1)}{3}
\end{aligned}$$

donc, en reconnaissant une identité remarquable, on conclut que $\boxed{S = \dfrac{n(n^2-1)}{3}}$.