# Devoir à la maison n°1

À rendre le mercredi 13 septembre 2023

**Exercice 1.** On considère la suite $(u_n)$ définie par $u_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = \frac{n+2}{2(n+1)} u_n.$$

**1.** Calculer $u_1$, $u_2$ et $u_3$.

**2.** La suite $(u_n)$ est-elle arithmétique ? Est-elle géométrique ?

**3.** On définit la suite $(v_n)$ par : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = \dfrac{u_n}{n+1}$.

**a.** Montrer que $(v_n)$ est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$.

**b.** Pour tout $n \in \mathbb{N}$, en déduire l'expression de $v_n$ puis celle de $u_n$ en fonction de $n$.

**Exercice 2.** On définit la suite $(t_n)$ par : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $t_n = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

**1.** Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $k^3 = t_k^2 - t_{k-1}^2$.

**2.** En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$.

**Exercice 3.** Soit $n \in \mathbb{N}$ et $S = \displaystyle\sum_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant n}} |i-j|$.

**1.** En utilisant la relation de Chasles, justifier que $S = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \left( \sum_{j=1}^{i-1} (i-j) + \sum_{j=i+1}^{n} (j-i) \right)$.

**2.** Soit un entier naturel $i$.

**a.** Montrer que $\displaystyle\sum_{j=1}^{i-1} (i-j) = \frac{i(i-1)}{2}$.

**b.** Montrer, de même, que $\displaystyle\sum_{j=i+1}^{n} (j-i) = \frac{(n-i)(n-i+1)}{2}$.

**3.** Justifier soigneusement que

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{(n-i)(n-i+1)}{2} = \sum_{i=1}^{n} \frac{i(i-1)}{2}.$$

**4.** Déduire des questions précédentes que $S = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} i^2 - \sum_{i=1}^{n} i$.

**5.** Conclure que $S = \dfrac{n(n^2-1)}{3}$.