♦ Chapitre 9. Matrices et applications linéaires

Dans toute la suite, K désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et E, F et G sont des K-espaces vectoriels de dimensions finies, respectivement n, m et p. On fixe, de plus, des bases $\mathcal{B}_E$, $\mathcal{B}_F$ et $\mathcal{B}_G$ des espaces E, F et G.

I. — Matrice d'une application linéaire

1) Représentation matricielle d'une famille de vecteurs (rappel)

Si $\mathcal{B}_E = (e_1, e_2, ..., e_n)$ alors, par théorème, tout vecteur v de E peut s'écrire de manière unique sous la forme

$$v = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \cdots + \lambda_n e_n.$$

Les scalaires λ_1, λ_2, ..., λ_n sont appelés les **coordonnées de v dans la base $\mathcal{B}$**. La matrice colonne $\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$ est appelée la **matrice des coordonnées v dans la base $\mathcal{B}$** et on la note $\mathcal{M}at_{\mathcal{B}_E}(v)$. Si $\mathcal{F} = (v_1, v_2, ..., v_p)$ est une famille de p vecteurs de E, on appelle **matrice de $\mathcal{F}$ dans la base $\mathcal{B}_E$** et on note $\mathcal{M}at_{\mathcal{B}_E}(\mathcal{F})$ la matrice de $\mathscr{M}_{n,p}(K)$ telle que, pour tout $j \in [\![1, p]\!]$, la j-ème colonne de $\mathcal{M}at_{\mathcal{B}}(\mathcal{F})$ est égale à la matrice colonne $\mathcal{M}at_{\mathcal{B}_E}(v_j)$.

2) Matrice d'une application linéaire

Définition 1

Soit $f : E \longrightarrow F$ une application linéaire. Si $\mathcal{B}_E = (e_1, e_2, ..., e_n)$ et $\mathcal{B}_F = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, ..., \varepsilon_m)$ alors la matrice de la famille $(f(e_1), f(e_2), ..., f(e_n))$ dans la base $\mathcal{B}_F$ es appelée la **matrice de f dans les bases $\mathcal{B}_E$ et $\mathcal{B}_F$**. Il s'agit d'une matrice de $\mathscr{M}_{m,n}(K)$ que l'on note $\mathcal{M}at_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}(f)$. Ainsi,

Coordonnées de $f(e_2)$ dans le base $\mathcal{B}_F$

Coordonnées de $f(e_1)$ dans le base $\mathcal{B}_F$

Coordonnées de $f(e_p)$ dans le base $\mathcal{B}_F$

$$\mathcal{M}at_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}(f) = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} * \\ * \\ \vdots \\ * \end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix} * \\ * \\ \vdots \\ * \end{matrix}} & \begin{matrix} \cdots \\ \cdots \\ \vdots \\ \cdots \end{matrix} & \boxed{\begin{matrix} * \\ * \\ \vdots \\ * \end{matrix}} \end{pmatrix} \end{array} \begin{matrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_m \end{matrix}$$

Remarque 2. La matrice de f dépend du choix des bases $\mathcal{B}_E$ et $\mathcal{B}_F$. En revanche, sa taille est toujours $\dim(F) \times \dim(E)$.

Exemple 3.

1. On considère l'application linéaire
$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & (x\,;y) & \longmapsto & (x+y\,;x+z\,;y+z) \end{array}$$
Déterminer la matrice de f dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$.
2. On considère l'application linéaire
$$\begin{array}{rccc} g: & \mathbb{R}_3[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_2[X] \\ & P & \longmapsto & P' \end{array}$$
Déterminer la matrice de g dans les bases canoniques de $\mathbb{R}_3[X]$ et $\mathbb{R}_2[X]$.

Définition 4

Soit f un endomorphisme de E. On appelle **matrice de f dans la base $\mathcal{B}_E$**, notée $\mathcal{M}at_{\mathcal{B}_E}(f)$, la matrice $\mathcal{M}at_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_E}(f)$.

Exemple 5. On considère l'application
$$\begin{array}{rccc} h: & \mathbb{R}_2[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_2[X] \\ & P & \longmapsto & P(1)X^2+P(2)X+P(-1) \end{array}$$

1. Justifier que h est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$.
2. Déterminer la matrice de h dans la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$.
3. Justifier que $\mathcal{B} = (X^2+3X-1, X^2+5X-4, X^2-X-1)$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$ et déterminer la matrice de h dans cette base.

Remarque 6. Dans n'importe quelles bases, la matrice de l'application nulle de E dans F est la matrice $0_{m,n}$ et la matrice de l'identité de E est la matrice I_n.

Propriété 7

Soit $f \in \mathscr{L}(E,F)$. Le rang de f est égal au rang de la matrice $\mathcal{M}at_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}(f)$. En particulier, le rang de cette matrice est indépendant du choix des bases de E et de F.

Exemple 8. Déterminer le rang des applications f, g et h définies dans les exemples 3 et 5.

3) Matrices et opérations

Propriété 9

Soit $f: E \longrightarrow F$ et $g: E \longrightarrow F$ deux applications linéaires, α et β deux scalaires et v un vecteur de E.

1. Si M est la matrice de f dans $\mathcal{B}_E$ et $\mathcal{B}_F$ et si V est la matrice de v dans $\mathcal{B}_E$ alors MV est la matrice de $f(v)$ dans $\mathcal{B}_F$.
2. Si M est la matrice de f dans $\mathcal{B}_E$ et $\mathcal{B}_F$ et N est la matrice de g dans $\mathcal{B}_E$ et $\mathcal{B}_F$ alors $\alpha M + \beta N$ est la matrice de $\alpha f + \beta g$ dans $\mathcal{B}_E$ et $\mathcal{B}_F$.

Exemple 10. Soit $Q = 2X^2 - 3X + 1$. Déterminer la matrice de Q dans la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$ et en déduire la matrice de $h(Q)$ dans la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$ où h est l'application linéaire de l'exemple 5.

Propriété 11

Soit $f : E \longrightarrow F$ et $g : F \longrightarrow G$ deux applications linéaires.
Si M est la matrice de f dans $\mathcal{B}_E$ et $\mathcal{B}_F$ et si N est la matrice de g dans $\mathcal{B}_F$ et $\mathcal{B}_G$ alors NM est la matrice de $g \circ f$ dans $\mathcal{B}_E$ et $\mathcal{B}_G$.

Exemple 12. Déterminer la matrice de $h \circ f$ dans les bases canoniques de $\mathbb{R}_3[X]$ et $\mathbb{R}_2[X]$ où f et h sont les applications linéaires définies dans les exemples 3 et 5.

Corollaire 13

Soit f un endomorphisme de E. On note M la matrice de f dans $\mathcal{B}_E$.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la matrice de $\underbrace{f \circ f \circ \cdots \circ f}_{n \text{ fois}}$ dans $\mathcal{B}_E$ est M^n.
2. f est un automorphisme si et seulement si M est inversible et, dans ce cas, on a $\mathcal{M}at_{\mathcal{B}_E}(f^{-1}) = M^{-1}$.

II. — Changement de bases

1) Matrice de passage

Définition 14

On considère ici deux bases $\mathcal{B} = (e_1, e_2, ..., e_n)$ et $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, ..., e'_n)$ de E. On appelle matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ la matrice $\mathcal{M}at_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}')$. On la note $P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'}$ ou $P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$.
Ainsi,

$$P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'} = \begin{array}{cc} \begin{matrix} e'_1 & e'_2 & \cdots & e'_n \end{matrix} & \\ \begin{pmatrix} * & * & \cdots & * \\ * & * & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & * \\ * & \cdots & * & * \end{pmatrix} & \begin{matrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_n \end{matrix} \end{array}$$

Exemple 15. Déterminer la matrice de passage de la base canonique $\mathcal{B}_{can}$ de $\mathbb{R}_2[X]$ à la base $\mathcal{B} = (X^2 + 3X - 1, X^2 + 5X - 4, X^2 - X - 1)$.

Notation 16. Si $\mathcal{B}$ est une base de E, on note $(E, \mathcal{B})$ l'espace vectoriel E muni de la base $\mathcal{B}$.

Propriété 17

Soit $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E. Alors, la matrice $P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'}$ est la matrice de l'application identité de $(E, \mathcal{B}')$ dans $(E, \mathcal{B})$.
En particulier, $P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'}$ est inversible et son inverse est $P_{\mathcal{B}'\to\mathcal{B}}$.

Exemple 18. Exprimer 1, X et X^2 dans la base $\mathcal{B} = (X^2 + 3X - 1, X^2 + 5X - 4, X^2 - X - 1)$ de $\mathbb{R}_2[X]$

2) Formules de changement de bases

Dans ce paragraphe, on considère deux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ de E et on note P la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ i.e. $P = P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'}$.

Propriété 19

Soit $v \in E$, V la matrice de v dans $\mathcal{B}$ et V' la matrice de v dans $\mathcal{B}'$. Alors,

$$V = PV' \qquad \text{c'est-à-dire} \qquad V' = P^{-1}V.$$

Même si P est la matrice de passage de l'« ancienne » base $\mathcal{B}$ dans la « nouvelle » base $\mathcal{B}'$, elle permet d'exprimer les « anciennes » coordonnées (celles de V) en fonction des nouvelles (celles de V'). Cela peut sembler paradoxal mais ça ne l'est pas si on se souvient que P est la matrice de l'identité de $(E, \mathcal{B}')$ dans $(E, \mathcal{B})$: il est donc naturel que P soit multipliée à droite par un vecteur exprimé dans $\mathcal{B}'$.

Exemple 20. Déterminer la matrice du polynôme $Q = 3X^2 - X + 7$ de $\mathbb{R}_2[X]$ dans la base $\mathcal{B} = (X^2 + 3X - 1, X^2 + 5X - 4, X^2 - X - 1)$.

Propriété 21

Soit $f \in \mathscr{L}(E)$. On note M la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$ et M' la matrice de f dans la base $\mathcal{B}'$. Alors,

$$M' = P^{-1}MP.$$

Remarque 22. Là encore, cette égalité se comprend bien si on interprète les matrices de passage comme les matrices de l'identité dans certaines bases. On a alors le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
(E, \mathcal{B}) \arrow[r, "f"] & (E, \mathcal{B}) \arrow[d, "\mathrm{id}_E"] \\
(E, \mathcal{B}') \arrow[u, "\mathrm{id}_E"] \arrow[r, "f"'] & (E, \mathcal{B}')
\end{tikzcd}$$

Par définition, M' est la matrice de $f : (E, \mathcal{B}') \longrightarrow (E, \mathcal{B}')$. On peut écrire cette application comme la composée de $\mathrm{id}_E : (E, \mathcal{B}') \longrightarrow (E, \mathcal{B})$ suivie de $f : (E, \mathcal{B}) \longrightarrow (E, \mathcal{B})$ suivie de $\mathrm{id}_E : (E, \mathcal{B}) \longrightarrow (E, \mathcal{B}')$. Or, la matrice de cette composée est $P^{-1}MP$ donc $M' = P^{-1}MP$.

Exemple 23. On considère l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ défini par $f : (x\,; y) \longmapsto (x - 4y\,; -2x + 3y)$.

1. Déterminer la matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$.
2. Montrer que les vecteurs $e_1 = (1\,; 1)$ et $e_2 = (-1\,; 2)$ forment une base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^2$.
3. Déterminer la matrice de f dans $\mathcal{B}$ de deux facons différentes.

III. — Application linéaire canoniquement associée à une matrice

1) Définition

On a vu dans ce qui précède que toute application linéaire entre espaces vectoriels peut être représentée par une matrice à condition de choisir une base de chaque espace. Inversement, toute matrice peut être vue comme la matrice d'une application linéaire.

Propriété 24

Soit $M \in \mathscr{M}_{m,n}(K)$. Il existe une unique application linéaire $f \in \mathscr{L}(K^n, K^m)$ telle que la matrice de f dans les bases canoniques de K^n et K^m soit la matrice M.

Définition 25

Soit $M \in \mathscr{M}_{m,n}(K)$. L'unique application linéaire définie par la propriété précédente s'appelle l'**application linéaire canoniquement associée** à M.

Exemple 26. Déterminer les applications linéaires canoniquement associées aux matrices suivantes : $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & -2 & 5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -\mathrm{i} \\ 0 & 1 \\ 3+\mathrm{i} & -4 \\ 2\mathrm{i} & -2 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -5 & 2 & 3 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$.

Définition 27

Soit $M \in \mathscr{M}_{m,n}(K)$ et $f : K^n \longrightarrow K^m$ l'application linéaire canoniquement associée à M.

1. On définit le **noyau** de M, noté $\ker(M)$, comme le noyau de f.
2. On définit l'**image** de M, noté $\mathrm{Im}(M)$, comme l'image de f.

Remarque 28. Autrement dit, le noyau de M est le sous-espace vectoriel formé des vecteurs $u \in K^n$ tels que $M{}^tu = 0_{m,1}$ et l'image de M est le sous-espace vectoriel formé des vecteurs $v \in K^m$ tels qu'il existe $u \in K^n$ tel que ${}^tv = M{}^tu$.

Exemple 29. Déterminer le noyau et l'image de chacune des matrices A, B et C de l'exemple 26.

2) Retour sur la notion de rang

Propriété 30

Soit $M \in \mathscr{M}_{m,n}(K)$ et f l'application linéaire canoniquement associée à M. Alors, il y a égalité entre :

- le rang de M i.e. le nombre de pivots obtenus par la méthode du pivot de Gauss ;
- le rang de f i.e. $\dim(\mathrm{Im}(f))$;
- le rang de la famille $(C_1, C_2, ..., C_n)$ des vecteurs colonnes de la matrice M i.e. $\dim(\mathrm{Vect}(C_1, C_2, ..., C_n))$.

De plus, la famille $(C_1, C_2, ..., C_n)$ est une famille génératrice de $\mathrm{Im}(M)$ et le théorème du rang s'écrit en termes matriciels

$$\dim(\ker(M)) + \mathrm{rg}(M) = n.$$

Exemple 31. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$. Déterminer le noyau de A, la dimension de $\mathrm{Im}(A)$ ainsi qu'une base de cet espace.

Corollaire 32

Soit $M \in \mathscr{M}_n(K)$ et f l'endomorphisme de K^n canoniquement associé à M. Alors, il y a équivalence entre :

- M est inversible ;
- tout système linéaire ayant M comme matrice des coefficients possède une unique solution dans K^n ;
- f est un automorphisme ;
- $\ker(M) = \{0_{K^n}\}$;
- $\mathrm{Im}(M) = K^n$;
- f est injective ;
- f est surjective ;
- $\mathrm{rg}(f) = n$.

Propriété 33

Soit $A \in \mathscr{M}_{m,n}(K)$. Alors, $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}({}^tA)$.

Exemple 34. En utilisant l'exemple 31, montrer que $e_1 = (1\,;0\,;1)$, $e_2 = (3\,;1\,;-1)$ et $e_3 = (2\,;2\,;-1)$ forment une base de $\mathbb{R}^3$.

IV. — Exercices

Exercice 1. Déterminer la matrice de chacune des applications linéaires suivantes dans les bases canoniques.

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x\,;y\,;z) & \longmapsto & (x+y\,;y-2x+z) \end{array} \qquad g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x\,;y\,;z) & \longmapsto & (y+z\,;z+x\,;x+y) \end{array}$$

$$h : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_3[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_3[X] \\ P & \longmapsto & P(X+1) \end{array} \qquad k : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_3[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}^4 \\ P & \longmapsto & (P(1), P(2), P(3), P(4)) \end{array}.$$

Exercice 2. On considère l'application linéaire

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x\,;y\,;z) & \longmapsto & (5x+5y-2z\,;x+7y-z) \end{array}$$

1. Montrer que $\mathcal{B} = ((1\,;0\,;2)\,,(0\,;1\,;1)\,,(1\,;0\,;1))$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
2. Montrer que $\mathcal{B}' = ((1\,;-1)\,,(1\,;2))$ est une base de $\mathbb{R}^2$ et déterminer $\mathcal{M}at_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f)$.

Exercice 3. On considère l'application linéaire

$$h : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x\,;y) & \longmapsto & (5x+2y\,;3x+y) \end{array}$$

1. On note $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$. Déterminer la matrice A de f dans la base $\mathcal{B}$.
2. En utilisant A, démontrer que f est bijective et déterminer l'expression de $f^{-1}(x,y)$ pour tout $(x\,;y) \in \mathbb{R}^2$.

Exercice 4. On considère l'endomorphisme

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x\,;y\,;z) & \longmapsto & \left(\frac{x-2y+z}{2}\,;y\,;\frac{x+2y+z}{2}\right) \end{array}$$

1. Déterminer la matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

2. En déduire les matrices dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ de $g = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3} - f$ et de $h = 2f - \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}$.

Exercice 5. On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -3 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

On pose $u = (1\,;1\,;0)$, $v = (1\,;0\,;1)$, $w = (1\,;1\,;1)$ et $\mathcal{B}' = (u, v, w)$.

1. Écrire la matrice P de $\mathcal{B}'$ dans la base canonique $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$.

2. Démontrer que P est inversible et déterminer P^{-1}. Que peut-on en déduire concernant la famille $\mathcal{B}'$?

3. On note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à A.
En utilisant les formules de changement de base, déterminer la matrice de f dans $\mathcal{B}'$.

Exercice 6. On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

et on note f l'endomorphisme canoniquement associé à A.

On pose $\varepsilon_1 = (1\,;1\,;0)$, $\varepsilon_2 = (1\,;0\,;1)$ et $\varepsilon_3 = (1\,;1\,;1)$ et $\mathcal{B}' = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$.

1. Montrer que $\mathcal{B}'$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

2. Écrire la matrice de f dans la base $\mathcal{B}'$.

3. Déterminer une base de $\ker(A)$ et une base de $\mathrm{Im}(A)$.

Exercice 7. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ défini par $f(x, y) = (5x - 6y\,; 2x - 2y)$.

1. Déterminer la matrice A de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$.

2. Soit $e_1 = (3\,;2)$ et $e_2 = (2\,;1)$.

a. Démontrer que la famille $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ est une base de $\mathbb{R}^2$.

b. Calculer$f(e_1)$ et $f(e_2)$.

c. Déterminer la matrice D de f dans la base $\mathcal{B}$.

3. Calculer D^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

4. **a.** Déterminer la matrice de passage P de la base canonique de $\mathbb{R}^2$ à $\mathcal{B}$.

b. Exprimer A en fonction de D, P et P^{-1}.

c. Démontrer par récurrence que $A^n = PD^nP^{-1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

d. En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, les coefficients de A^n en fonction de n.

Exercice 8. Soit E un K-espace vectoriel muni d'une base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$. On considère l'endomorphisme f de E dont la matrice dans $\mathcal{B}$ est

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

et la famille $\mathcal{B}' = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ définie par

$$\begin{cases} \varepsilon_1 = e_1 + e_2 - e_3 \\ \varepsilon_2 = e_1 - e_3 \\ \varepsilon_3 = e_1 - e_2 \end{cases}$$

1. Montrer que $\mathcal{B}'$ est une base de E et écrire la matrice D de f dans cette base.

2. Déterminer la matrice de passage P de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ et calculer P^{-1}.

3. Exprimer A en fonction de D, P et P^{-1}.

4. Déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la matrice A^n.

Exercice 9. Déterminer le noyau, le rang et l'image de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Exercice 10. On considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$ est

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

On considère la famille $\mathcal{B}' = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ où $\varepsilon_1 = (1\,;0\,;1)$, $\varepsilon_2 = (-1\,;1\,;0)$ et $\varepsilon_3 = (1\,;1\,;1)$.

1. Démontrer que $\mathcal{B}'$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

2. Déterminer la matrice de f dans la base $\mathcal{B}'$.

3. Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer l'endomorphisme $f^n = \underbrace{f \circ f \circ \cdots \circ f}_{n \text{ fois}}$.

Exercice 11. En utilisant les matrices, déterminer le rang des applications linéaires suivantes.

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x\,;y\,;z) & \longmapsto & (x-y\,;y-z\,;z-x) \end{array} \qquad g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_2[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_2[X] \\ P & \longmapsto & XP'(X+1) \end{array}$$

$$h : \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \\ M & \longmapsto & AM - MA \end{array} \quad \text{avec} \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 12. Soit $n \in \mathbb{N}$.

1. Déterminer la matrice de l'endomorphisme $f : P \longmapsto P(X+1)$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

2. Justifier que M est inversible et déterminer M^{-1}.

Exercice 13. Soit A et B deux matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $AB = 0_3$. Montrer que $\mathrm{rg}(A) \leqslant 1$ ou $\mathrm{rg}(B) \leqslant 1$.