⧫ Chapitre 8. Variables aléatoires discrètes positives

Dans tout le chapitre, $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ est un espace probabilisé.

I. — Notion de variable aléatoire discrète

1) Définition et notations

Définition 1

Une **variable aléatoire** (réelle) sur Ω est une fonction X de Ω dans $\mathbb{R}$ telle que, pour tout intervalle $I \subset \mathbb{R}$, $\{X \in I\} = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \in I\}$ est un évènement.

Définition 2

Soit $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ une variable aléatoire. L'image directe de Ω par X est appelé l'**univers image** de X (ou le support de X). On le note $X(\Omega)$.
Autrement dit, l'univers image de X est

$$X(\Omega) = \{X(\omega) \mid \omega \in \Omega\} = \{t \in \mathbb{R} \mid \exists \omega \in \Omega,\ t = X(\omega)\}.$$

Définition 3

Une **variable aléatoire discrète** est une variable aléatoire X telle que $X(\Omega)$ est soit un ensemble fini soit un ensemble infini qu'on peut écrire sous la forme d'une suite (x_n).

Exemple 4.

1. On lance deux dés cubiques dont les faces sont numérotées de 1 à 6 et on considère la somme X des deux numéros obtenus. Ici, l'univers est $\Omega = [\![1, 6]\!]^2$ et S est une variable aléatoire sur Ω telle que $X(\Omega) = [\![2, 12]\!]$. Cet univers image est fini donc X est une variable aléatoire discrète.
2. On lance indéfiniment une pièce de monnaie et on note X le numéro du premier lancer où on obtient PILE (avec la convention $X = 0$ si on n'obtient jamais PILE). Alors, Ω est l'ensemble des toutes les séries infinies de lancers possibles i.e. $\mathscr{F}(\mathbb{N}, \{\text{PILE}, \text{FACE}\})$ et X est une variable aléatoire sur Ω telle que $X(\Omega) = \mathbb{N} = (n)_{n\in\mathbb{N}}$ donc X est une variable aléatoire discrète.
3. On lance une fléchette sur une cible de rayon 20 cm et on note X la distance entre le point d'impact de la fléchette et le centre de la cible. Alors, Ω est l'ensemble des points de la cible et X est une variable aléatoire sur Ω telle que $X(\Omega) = [0\,;20]$ donc X n'est pas une variable aléatoire discrète.

Remarque 5. Dans ce cours, on ne considérera que des variables aléatoires discrètes positives et, pour l'essentiel, des variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$. Il est possible des considérer des variables aléatoires discrètes de signes quelconques mais cela entraîne certaines complications techniques dans les définitions et les propriétés.

Définition 6

On considère une variable aléatoire discrète $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$. Soit a un réel quelconque. On définit

1. l'évènement $\{X = a\}$: c'est l'ensemble des éléments ω de Ω tels que $X(\omega) = a$; autrement dit, c'est l'ensemble de toutes les issues de l'expérience pour lesquelles la variable aléatoire X vaut a.
2. l'évènement $\{X \leqslant a\}$: c'est l'ensemble des éléments ω de Ω tels que $X(\omega) \leqslant a$; autrement dit, c'est l'ensemble de toutes les issues de l'expérience pour lesquelles la variable aléatoire X prend une valeur inférieure ou égale à a.

On définit de façon analogue les évènements $\{X < a\}$, $\{X \geqslant a\}$ et $\{X > a\}$.

Remarque 7. Il faut bien comprendre que ce sont des évènements et ce sont donc des parties de l'univers Ω même si a lui n'appartient pas à Ω.

Exemple 8. Si X est la variable aléatoire égale au rang d'apparition du premier PILE lors d'une infinité de lancers successifs alors $\{X = 3\}$ est l'évènement « Obtenir PILE pour la première fois au 3e lancer » et $\{X > 5\}$ est l'évènement « N'obtenir que des FACE au cours des 5 premiers lancers ».

Notation 9. Pour tout réel a, on note $P(X = a)$ la probabilité de l'évènement $\{X = a\}$ (au lieu de $P(\{X = a\})$. On note de même $P(X \leqslant a)$, $P(X < a)$, $P(X \geqslant a)$ et $P(X > a)$ les probabilités des évènements $\{X \leqslant a\}$, $\{X < a\}$, $\{X \geqslant a\}$ et $\{X > a\}$.

Propriété 10

On considère une variable aléatoire discrète positive $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$. Les évènements $\{X = a\}$ pour a parcourant $X(\Omega)$ forment un système complet d'évènements.
En particulier, la somme des probabilités de tous ces évènements est égale à 1, ce que l'on notera

$$\sum_{a \in X(\Omega)} \mathbf{P}(X = a) = 1.$$

Remarque 11. Si l'univers image $X(\Omega) = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ est un ensemble fini alors la somme $\displaystyle\sum_{a \in X(\Omega)} \mathbf{P}(X = a) = \sum_{k=1}^{n} P(X = x_k)$ est une somme finie mais lorsque $X(\Omega) = (x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est infini alors $\displaystyle\sum_{a \in X(\Omega)} \mathbf{P}(X = a) = \sum_{k=0}^{+\infty} P(X = x_k)$ est la somme d'une série.

II. — Loi de probabilité d'une variable aléatoire discrète

1) Définition

Définition 12

On considère une variable aléatoire discrète positive $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}_+$. La **loi de probabilité** de X est la donnée des probabilités $\mathbf{P}(X = a)$ lorsque a parcourt $X(\Omega)$.

Exemple 13. Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X égale au rang d'apparition du premier PILE lors d'une infinité de lancers successifs d'une pièce équilibrée.

Remarque 14. La loi de probabilité d'une variable aléatoire X peut être représentée graphiquement par un diagramme en bâtons : on place en abscisses les valeurs a appartenant à $X(\Omega)$ et en ordonnées les probabilités associées, en traçant au-dessus de a un segment (un « bâton ») de hauteur $\mathbf{P}(X = a)$. Ceci est surtout pertinent quand $X(\Omega)$ est fini.

Définition 15

Soit X et Y deux variables aléatoires discrètes positives définies sur le même univers Ω. On dit que ces variables ont la **même loi** si $X(\Omega) = Y(\Omega)$ et, pour tout $a \in X(\Omega)$, $\mathbf{P}(X = a) = \mathbf{P}(Y = a)$.

Remarque 16. Dire que deux variables aléatoires ont la même loi ne signifie par que ces deux variables aléatoires sont égales. Considérons, par exemple, un lancer de pièce équilibrée. Si on note X la variable aléatoire égale à 1 si on obtient PILE et 0 si on obtient FACE et Y la variable aléatoire égale à 1 si on obtient FACE et 0 si on obtient PILE alors X et Y ont la même loi ($X(\Omega) = Y(\Omega) = \{0\,;1\}$, $\mathbf{P}(X = 0) = P(Y = 0) = \frac{1}{2}$ et $\mathbf{P}(X = 1) = \mathbf{P}(Y = 1) = \frac{1}{2}$) mais $X \neq Y$ car si $X = 0$ alors $Y = 1$.

2) Fonction de répartition

Définition 17

On considère une variable aléatoire discrète positive $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}_+$. La **fonction de répartition** de X, notée F_X, est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad F_X(t) = \mathbf{P}(X \leqslant t).$$

Exemple 18. On considère une variable aléatoire Y à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ dont la loi de probabilité est donnée par : pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\mathbf{P}(Y = k) = \dfrac{1}{k(k+1)}$.

1. Vérifier que $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \mathbf{P}(X = k) = 1$.

2. Déterminer la fonction de répartition F_Y de Y et tracer sa courbe sur $[-3\,;3]$.

Propriété 19

On considère une variable aléatoire discrète positive $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}_+$. On suppose que $X(\Omega) = (x_k)_{k\in I}$ est une suite strictement croissante sur I avec $I = \{0, 1, 2, ..., n\}$ ou $I = \mathbb{N}$.

1. F_X est croissante sur $\mathbb{R}$;

2. F_X est discontinue en toute valeur de (x_k) ;

3. F_X est constante sur chaque intervalle de la forme $[x_k\,; x_{k+1}[$.

4. pour tout $t < x_0$, $F_X(t) = 0$;

5. $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} F_X(t) = 1$.

Propriété 20

Soit $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}_+$ une variable aléatoire discrète positive. La fonction F_X détermine entièrement la loi de X. Plus précisément, avec les notations précédentes,

$$\forall k \in I, \quad P(X = x_k) = F_X(x_k) - F_X(x_{k-1})$$

en prenant pour x_{-1} n'importe quelle valeur $a < x_0$.

III. — Espérance, variance, écart-type

1) Espérance

Définition 21

On considère une variable aléatoire discrète positive $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}_+$. On définit l'**espérance** de X, notée $\mathbf{E}(X)$, par

$$\mathbf{E}(X) = \sum_{a \in X(\Omega)} a\mathbf{P}(X = a)$$

à condition que cette quantité soit finie. Dans le cas contraire, X n'admet pas d'espérance.

Remarque 22.

1. Autrement dit, si $X(\Omega) = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ est un ensemble fini, X possède une espérance $\mathbf{E}(X)$ définie par
$$\mathbf{E}(X) = \sum_{k=1}^{n} x_k \mathbf{P}(X = x_k).$$
En revanche, si $X(\Omega) = (x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est un ensemble infini alors X possède une espérance $\mathbf{E}(X)$ si et seulement si la série $\sum x_k \mathbf{P}(X = x_k)$ converge et alors
$$\mathbf{E}(X) = \sum_{k=0}^{+\infty} x_k \mathbf{P}(X = x_k).$$
2. L'espérance est l'équivalent en probabilité de la moyenne en statistique. L'espérance d'une variable aléatoire s'interprète comme la valeur moyenne de la variable X. Ainsi, si X représente un gain à un jeu alors $E(X)$ représente le gain moyen.

Exemple 23.

1. On reprend la variable aléatoire X définie dans l'exemple 13. La variable aléatoire X possède-t-elle une espérance ? Si oui, la calculer.
2. On reprend la variable aléatoire Y définie dans l'exemple 18. La variable aléatoire Y possède-t-elle une espérance ? Si oui, la calculer.

Définition 24

On dit qu'une variable X est **centrée** si $\mathbf{E}(X) = 0$.

Remarque 25. On considère un jeu dans lequel le gain algébrique (c'est-à-dire la différence entre le gain et la mise) est une variable aléatoire X. On dit que le jeu est équitable si X est centrée, favorable au joueur si $E(X) > 0$ et défavorable au joueur si $E(X) < 0$.

Propriété 26

Soit X et Y deux variables aléatoires discrètes positives définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$.

1. Pour tous réels a et b tels que $aX + bY \geqslant 0$, $\mathbf{E}(aX + bY) = a\mathbf{E}(X) + b\mathbf{E}(Y)$ (linéarité de l'espérance).
2. $\mathbf{E}(X) \geqslant 0$ (positivité de l'espérance).
3. Si, pour tout $\omega \in \Omega$, $X(\omega) \leqslant Y(\omega)$ alors $\mathbf{E}(X) \leqslant \mathbf{E}(Y)$ (croissance de l'espérance).

Remarque 27. En particulier, pour tous réels a et b tels que $aX + b \geqslant 0$, $\mathbf{E}(aX + b) = a\mathbf{E}(X) + b$.

Théorème 28. — Théorème de transfert

Soit $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}_+$ une variable aléatoire discrète positive et $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$ une fonction. Alors, $f(X)$ est une variable aléatoire discrète positive et

$$\mathbf{E}(f(X)) = \sum_{a \in X(\Omega)} f(a) P(X = a)$$

à condition que cette quantité soit finie. Dans le cas contraire, $f(X)$ n'admet pas d'espérance.

Remarque 29. L'intérêt du théorème de transfert est de pouvoir calculer l'espérance de $f(X)$ à partir de la loi de X et sans avoir à déterminer la loi de $f(X)$.

Exemple 30. On reprend les variables aléatoires X et Y des exemples 13 et 18.

1. Montrer que la variable aléatoire X^2 admet une espérance et calculer sa valeur.
2. La variable $Z = \frac{1}{Y}$ admet-elle une espérance ?

2) Variance et écart-type

Définition 31

Soit $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}_+$ une variable aléatoire discrète positive admettant une espérance. On dit que X admet une variance si la variable aléatoire $(X - \mathbf{E}(X))^2$ admet une espérance. Dans ce cas, on définit la **variance** de X, notée $\mathbf{V}(X)$, par

$$\mathbf{V}(X) = \mathbf{E}((X - \mathbf{E}(X))^2)$$

et l'**écart-type** de X, noté $\sigma(X)$, par

$$\sigma(X) = \sqrt{\mathbf{V}(X)}.$$

Remarque 32.

1. La variance représente « la moyenne des carrés des écarts à la moyenne ». Elle mesure la dispersion des valeurs autour de l'espérance. Plus la variance est grande, plus les valeurs sont dispersées et inversement.
2. On considère l'écart-type plutôt que la variance pour des raisons d'homogénéité.
3. D'après le théorème de transfert, $\mathbf{V}(X) = \displaystyle\sum_{a \in X(\Omega)} (a - \mathbf{E}(X))^2 \mathbf{P}(X = a)$.

Exemple 33. Les variables aléatoires X, Y et $Z = \frac{1}{Y}$ des exemples 13, 18 et 30 admettent-elles des variances ? Si oui, les calculer.

Théorème 34. — Formule de König-Huygens

Soit X une variable aléatoire discrète positive admettant une espérance. Alors, X admet une variance si et seulement si X^2 admet une variance et $\mathbf{V}(X) = \mathbf{E}(X^2) - \mathbf{E}(X)^2$.

Exemple 35. Retrouver les résultats de l'exemple précédent en utilisant la formule de König-Huygens.

Propriété 36

Soit $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}_+$ une variable aléatoire discrète positive. Pour tous réels a et b tels que $aX + b \geqslant 0$, $\mathbf{V}(aX + b) = a^2\mathbf{V}(X)$ et $\sigma(aX + b) = |a|\,\sigma(X)$.

Définition 37

On dit qu'une variable aléatoire X est **réduite** si $\mathbf{V}(X) = 1$.

IV. — Variables aléatoires indépendantes

Définition 38

On considère deux variables aléatoires discrètes positives définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$. On dit que X et Y sont **indépendantes** si, pour tout $a \in X(\Omega)$ et tout $b \in Y(\Omega)$, les évènements $\{X = a\}$ et $\{Y = b\}$ sont indépendants i.e. si $P(\{X = a\} \cap \{Y = b\}) = P(X = a)P(Y = b)$.

Exemple 39. On lance deux fois de suite une pièce équilibrée. On considère les variables aléatoire suivantes : X_1 est égale à 1 si on a obtenu au moins 1 PILE et 0 sinon, Y_1 est égale à 1 si on a obtenu au moins 1 FACE et 0 sinon, X_2 est égale à 1 si on a obtenu PILE au premier lancer et 0 sinon, Y_2 est égale à 1 si on a obtenu FACE au second lancer et 0 sinon.

Étudier l'indépendance de X_1 et Y_1 puis celle de X_2 et Y_2.

Propriété 40

On considère deux variables aléatoires discrètes positives définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$. On suppose que X et Y sont indépendantes.

1. Si X et Y admettent des espérances alors XY aussi et $\mathbf{E}(XY) = \mathbf{E}(X)\mathbf{E}(Y)$.
2. Si X et Y admettent des variances alors $X + Y$ aussi et $\mathbf{V}(X + Y) = \mathbf{V}(X) + \mathbf{V}(Y)$.

Exemple 41. On reprend les variables aléatoires de l'exemple précédent. Calculer $\mathbf{E}(X_1)$, $\mathbf{E}(Y_1)$ et $\mathbf{E}(X_1Y_1)$ puis $\mathbf{E}(X_2)$, $\mathbf{E}(Y_2)$ et $\mathbf{E}(X_2Y_2)$.

V. — Lois usuelles

1) Loi certaine

Définition 42

On dit qu'une variable aléatoire sur Ω suit une **loi certaine** s'il existe a tel que, pour tout $\omega \in \Omega$, $X(\omega) = a$.

Propriété 43

Soit X une variable aléatoire suivant une loi certaine égale à a. Alors,

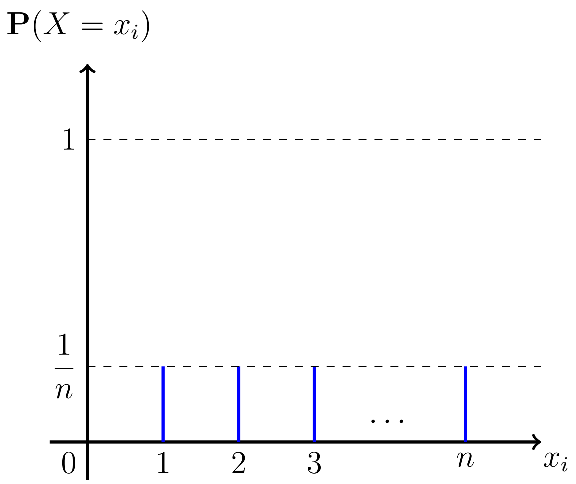
$$\mathbf{E}(X) = a \qquad \text{et} \qquad \mathbf{V}(X) = 0.$$

2) Loi uniforme

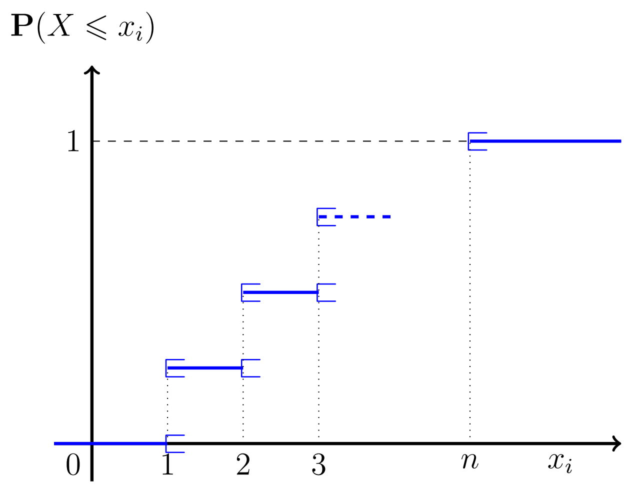
Définition 44

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On dit qu'une variable aléatoire définie sur Ω suit une **loi uniforme** sur $[\![1, n]\!]$ si $X(\Omega) = [\![1, n]\!]$ et si, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $\mathbf{P}(X = k) = \dfrac{1}{n}$.

Dans ce cas, on note $X \hookrightarrow \mathscr{U}([\![1, n]\!])$



Loi de probabilité d'une variable aléatoire suivant une loi uniforme sur $[\![1, n]\!]$.



Fonction de répartition d'une variable aléatoire suivant une loi uniforme sur $[\![1, n]\!]$.

Remarque 45. On utilise la loi uniforme dans des situations d'équiprobabilité.

Propriété 46

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Si $X \hookrightarrow \mathscr{U}([\![1, n]\!])$ alors

$$\mathbf{E}(X) = \frac{n+1}{2} \qquad \text{et} \qquad \mathbf{V}(X) = \frac{n^2 - 1}{12}.$$

Exemple 47. On lance un dé icosaédrique équilibré c'est-à-dire un dé à 20 faces dont les faces sont numérotées de 1 à 20. On note X le résultat obtenu sur la face cachée du dé.

1. Déterminer la loi de X.
2. Si on lance un grand nombre de fois le dé, à combien peut-on estimer la valeur moyenne des résultats obtenus ?

Comment simuler une loi uniforme sur $[\![1,n]\!]$ en langage Python ?

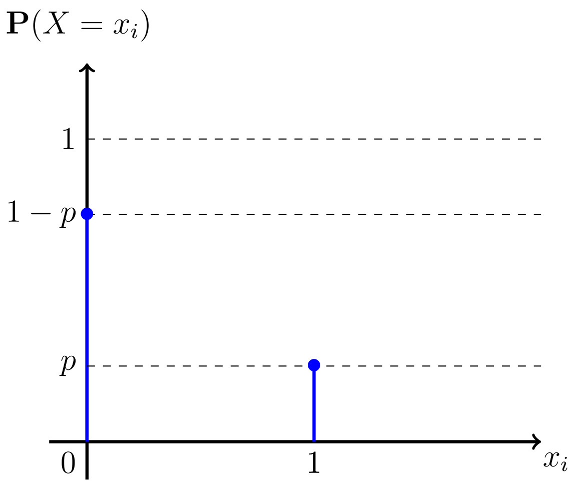
```
from random import *

def loi_unif(n):
  return randint(1,n)
```

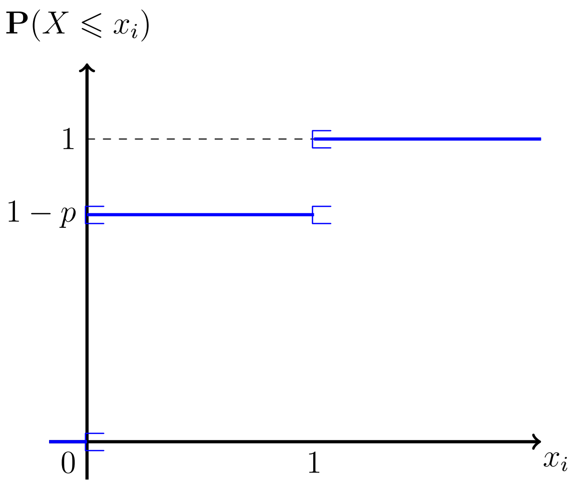
3) Loi de Bernoulli

Définition 48

Soit $p \in]0\,;1[$. On dit qu'un variable aléatoire $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ suit une **loi de Bernoulli** de paramètre p si $X(\Omega) = \{0\,;1\}$, $\mathbf{P}(X=1) = p$ et $\mathbf{P}(X=0) = 1-p$.
Dans ce cas, on note $X \hookrightarrow \mathscr{B}(p)$.



Loi de probabilité d'une variable aléatoire suivant une loi de Bernoulli



Fonction de répartition d'une variable aléatoire suivant une loi de Bernoulli

Remarque 49. Dans la pratique, une variable de Bernoulli peut se définir pour n'importe quelle expérience dans laquelle on s'intéresse à un évènement particulier S, appelé *succès*. On peut alors définir une variable aléatoire X valant 1 en cas de succès et 0 sinon qui suit une loi de Bernoulli de paramètre $\mathbf{P}(S)$.

Propriété 50

Soit $p \in [0\,;1]$. Si $X \hookrightarrow \mathscr{B}(p)$ alors

$$\mathbf{E}(X) = p \qquad \text{et} \qquad \mathbf{V}(X) = p(1-p).$$

Comment simuler une loi de Bernoulli de paramètre p en langage Python ?

```python
from random import *

def loi_bernoulli(p):
  t=random()
  if t<p:
    return 1
  else:
    return 0
```

4) Loi de Poisson

Définition 51

Soit un réel $\lambda > 0$. On dit qu'une variable aléatoire X définie sur Ω suit une **loi de Poisson** de paramètre λ si $X(\Omega) = \mathbb{N}$ et si

$$\forall k \in \mathbb{N} \qquad \mathbf{P}(X = k) = \mathrm{e}^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}.$$

Dans ce cas, on note $X \hookrightarrow \mathscr{P}(\lambda)$.

Propriété 52

Soit un réel $\lambda > 0$. Si $X \hookrightarrow \mathscr{P}(\lambda)$ alors X admet une espérance et une variance et

$$\mathbf{E}(X) = \mathbf{V}(X) = \lambda.$$

5) Schéma de Bernoulli

a) Définition

Lorsqu'on considère une succession d'expériences telles que le résultat de l'une n'a pas d'influence sur les suivantes, on dit que ces expériences sont indépendantes.

On considère une expérience aléatoire et on fixe un évènement S lié à cette expérience. On note p la probabilité de S. On s'intéresse à la réalisation de l'évènement S. On dit alors que l'expérience aléatoire et une épreuve de Bernoulli de paramètre p avec comme succès l'évènement S.

La répétition d'une succession d'épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes constitue un **schéma de Bernoulli**.

L'exemple typique de schéma de Bernoulli est la répétition de lancers de pièce ou de dé ou le tirage avec remise dans une urne.

Dans un schéma de Bernoulli, on peut considérer la suite de variables aléatoires (X_n) telles que $X_k = 1$ si S est réalisé à la k-ème répétition de l'expérience et $X_k = 0$ sinon. Pour tout entier k, X_k suit une loi de Bernoulli de paramètre p. De plus, les variables X_k sont deux à deux indépendantes.

b) Loi binomiale

Définition 53

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in]0\,;1[$. On dit qu'une variable aléatoire $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ suit une **loi binomiale** de paramètres n et p si $X(\Omega) = [\![0, n]\!]$ et

$$\forall k \in [\![0, n]\!], \quad \mathbf{P}(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

Dans ce cas, on note $X \hookrightarrow \mathscr{B}(n, p)$.

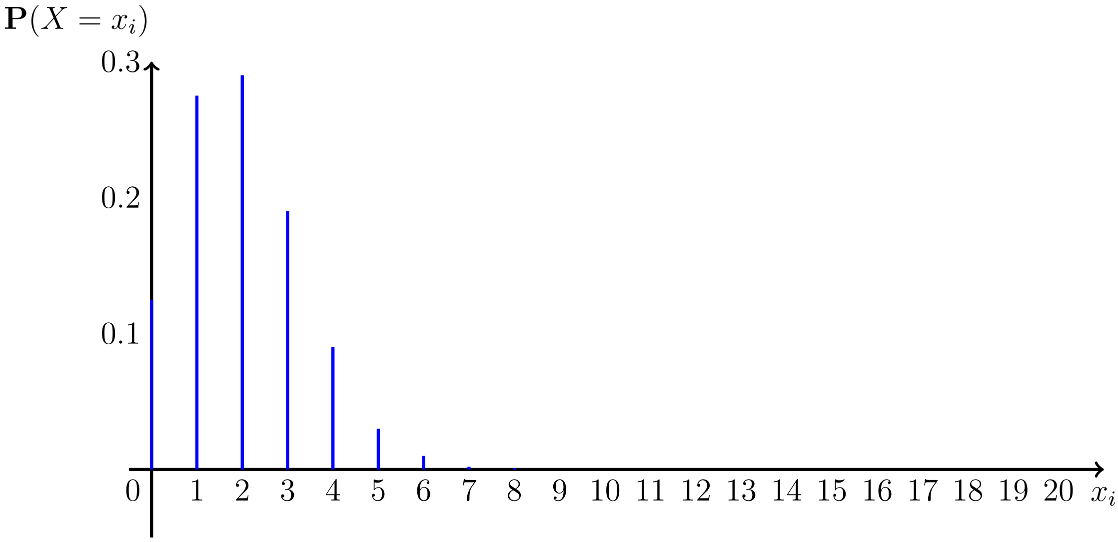


Diagramme en bâtons de la loi $\mathscr{B}(20, 0{,}1)$

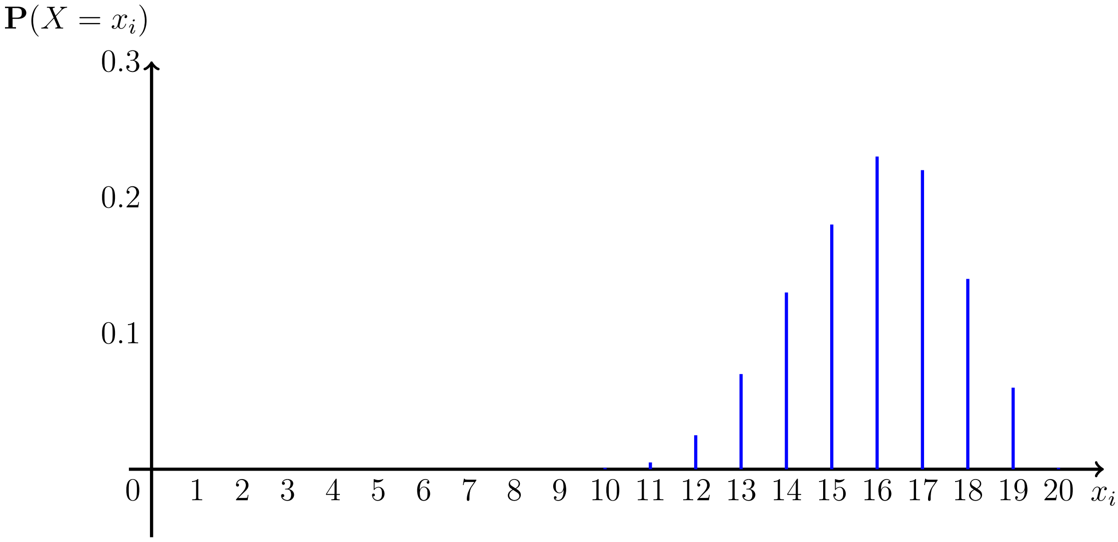


Diagramme en bâtons de la loi $\mathscr{B}(20, 0{,}8)$

Propriété 54

Si X compte le nombre de succès dans un schéma de Bernoulli constitué de n répétitions d'une épreuve de paramètre p alors $X \hookrightarrow \mathscr{B}(n, p)$.

Exemple 55. On lance 6 fois de suite un même dé cubique bien équilibré. On appelle X la variable aléatoire égale au nombre de 1 obtenus.

1. Déterminer la loi de X.
2. Calculer les probabilités des évènements suivants :
   a. A : « obtenir exactement trois 1 » ;
   b. B : « obtenir au moins un 1 ».

Propriété 56

Soit $p \in [0\,;1]$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Si $X \hookrightarrow \mathscr{B}(n,p)$ alors

$$\mathbf{E}(X) = np \qquad \text{et} \qquad \mathbf{V}(X) = np(1-p).$$

Exemple 57. Un Q.C.M. comporte 5 questions. Pour chaque question, 4 réponses sont proposées dont une seule est exacte. On suppose qu'on répond au hasard à ce Q.C.M. On note X la variable aléatoire égale au nombre de réponses correctes.

1. Montrer que X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.
2. Déterminer la probabilité d'obtenir exactement 2 bonnes réponses.
3. Déterminer la probabilité d'obtenir au plus 2 bonnes réponses.
4. Déterminer l'espérance de X et en donner une interprétation.

Propriété 58

Soit $p \in]0\,;1[$ et m et n deux entiers naturels non nuls. On considère deux variables aléatoires indépendantes X et Y telles que $X \hookrightarrow \mathscr{B}(n,p)$ et $Y \hookrightarrow \mathscr{B}(m,p)$.
Alors, $X+Y \hookrightarrow \mathscr{B}(n+m,p)$.

Comment simuler une loi de binomiale de paramètres n et p en Python ?

On utilise le programme déjà créé pour la loi de Bernoulli de paramètre p :

```python
def loi_binomiale(n,p):
  S=0
  for k in range(n):
    S=S+loi_bernoulli(p)
  return S
```

c) Loi géométrique

Définition 59

Soit $p \in]0\,;1[$. On dit qu'une variable aléatoire définie sur Ω suit une **loi géométrique** si $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et si

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad P(X=k) = (1-p)^{k-1}p.$$

On note alors $X \hookrightarrow \mathscr{G}(p)$.

Propriété 60

Soit $p \in]0\,;1[$. Si $X \hookrightarrow \mathscr{G}(p)$ alors X admet une espérance et une variance et

$$\mathbf{E}(X) = \frac{1}{p} \qquad \text{et} \qquad \mathbf{V}(X) = \frac{1-p}{p^2}.$$

Propriété 61

On considère un schéma de Bernoulli qui consiste en la répétition d'une infinité d'épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes de paramètre p. Alors, la probabilité d'obtenir le premier succès lors de la k-ème expérience est $P(T=k)$ où $T \hookrightarrow \mathscr{G}(p)$.

Exemple 62. On lance indéfiniment un dé cubique équilibré. On note T_1 le rang d'apparition du premier 6 et T_2 le rang d'apparition du deuxième 6. Montrer que, pour tous entiers naturels non nuls k et ℓ,

$$P(T_2 = k+\ell \mid T_1 = k) = P(T_1 = \ell).$$

VI. — Exercices

Exercice 1. Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ dont la fonction de répartition est donnée par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad F_X(n) = \frac{2^n - 1}{2^n}.$$

Déterminer la loi de X puis vérifier que $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \mathbf{P}(X=k) = 1$.

Exercice 2. Une urne contient initialement une boule noire. On y effectue des tirages successifs d'un boule. Si on tire la boule noire, on la remet dans l'urne en y ajoutant une boule blanche. On s'arrête dès qu'on tire une boule blanche. On note :

- X la variable aléatoire égale au nombre de tirages que l'on effectue dans l'urne ;
- pour tout $k \in \mathbb{N}$, N_k : « on tire une boule noire au k-ème tirage ».

Ainsi, si on tire une boule noire, puis une boule noire, puis une boule blanche alors $X = 3$.

1. Déterminer l'ensemble $X(\Omega)$ des valeurs que peut prendre X.

2. Soit un entier $n \geqslant 2$.

  a. Exprimer l'évènement $\{X = n\}$ en fonction de N_1, N_2, ..., N_n et de leurs contraires.

  b. Soit $k \in [\![2, n]\!]$. Si on a obtenu des boules noires lors des $k-1$ premiers tirages, combien l'urne contient-elle de boules blanches au moment du k-ème tirage ?

  c. En déduire que, pour tout entier $n \geqslant 2$, $\mathbf{P}(X=n) = \dfrac{n-1}{n!}$.

3. Vérifier que $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \mathbf{P}(X=n) = 1$.

4. Montrer que X possède une espérance et la calculer.

5. **a.** Montrer que $X(X-2)$ admet une espérance la calculer

  b. En déduire que X^2 admet une espace et la calculer.

  c. Conclure que X admet une variance et la calculer.

Exercice 3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On effectue deux tirages successifs avec remise dans une urne contenant n boules numérotées de 1 à n. On note X le premier numéro obtenu, Y le second, et $Z = \max(X, Y)$ le plus grand des deux.

1. Déterminer les lois de X et Y.

2. Calculer $F_X(k)$ et $F_Y(k)$ pour tout $k \in [\![0, n]\!]$.

3. Quel est l'ensemble $Z(\Omega)$ des valeurs que peut prendre Z ?

4. **a.** Que peut-on dire des variables aléatoires X et Y ?

b. En déduire que pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $F_Z(k) = F_X(k)F_Y(k)$.

c. Déterminer la loi de Z.

Exercice 4. Le trousseau d'un gardien de phare compte n clés ($n \geqslant 1$) dont une seule ouvre son phare. Il essaye les clés une par une. On note X le nombre d'essais qu'il lui faut pour ouvrir le phare.

1. Après avoir testé une clé, il l'enlève de son trousseau.

a. Quel est l'ensemble des valeurs possibles pour X ?

b. Déterminer $\mathbf{P}(X = 1)$, $\mathbf{P}(X = 2)$ puis $\mathbf{P}(X = k)$ pour tout $k \in X(\Omega)$.

c. Combien d'essais lui faut-il en moyenne pour ouvrir le phare ?

2. On suppose maintenant que notre gardien est étourdi et qu'il oublie d'enlever les clés qu'il a déjà essayées. Combien d'essais lui faut-il en moyenne pour ouvrir le phare ?

Exercice 5. Dans chacun des cas ci-dessous, dire si la variable X suit l'une des lois usuelles du cours et, si oui, préciser laquelle.

1. Une urne contient 3 boules blanches et 4 boules noires. On y effectue 10 tirages successifs avec remise et on note X le nombre de boules blanches obtenues.

2. On tire au hasard une boule dans une urne contenant 5 des boules numérotées de 1 à 5, et on note X le résultat obtenu.

3. Une urne contient 3 boules blanches et 4 boules noires. On tire simultanément deux boules dans l'urne et on note X la somme des deux numéros obtenus.

4. Une urne contient 3 boules blanches et 4 boules noires. On y effectue des tirages avec remise et note X le numéro du tirage auquel on obtient la première boule blanche.

5. On lance 8 fois de suite un dé cubique équilibré et on note X le nombre de 3 obtenus.

6. On lance 8 fois de suite un dé cubique équilibré et on note X le numéro obtenu au troisième lancer.

Exercice 6. Une puce se déplace vers la droite le long d'un axe gradué. Elle se trouve initialement à l'abscisse 0. À chaque seconde, elle effectue soit un petit saut d'une unité vers la droite avec probabilité $\frac{1}{3}$ soit un grand saut de deux unités avec probabilité $\frac{2}{3}$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note X_n l'abscisse à laquelle se trouve la puce après n sauts et G_n le nombre de grands sauts qu'elle a fait.

1. Déterminer la loi de G_n, son espérance et sa variance.

2. Exprimer X_n en fonction de G_n.

3. En déduire l'espérance et la variance de X_n.

Exercice 7. Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes définies sur le même espace probabilisé et suivant respectivement une loi géométrique de paramètre $p \in \,]0\,;1[$ et une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. Calculer $\mathbf{P}(X = Y)$.

Exercice 8. Soit X et Y deux variables aléatoires discrètes indépendantes suivant la même loi géométrique de paramètre p.

1. Déterminer $\mathbf{P}(X > n)$ pour $n \in \mathbb{N}$.

2. En déduire la loi de $Z = \min(X, Y)$.

Exercice 9. On considère un péage composé de m guichets numérotés de 1 à m où m est un entier naturel non nul. On note N la variable aléatoire égale au nombre de voitures se présentant au péage en une heure. On suppose que la variable aléatoire N suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. Les conducteurs se présentant au péage choisissent aléatoirement un guichet de manière équiprobable et indépendamment les uns des autres.

On note X la variable aléatoire égale au nombre de conducteurs se présentant au guichet n°1 en une heure.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $k \in [\![0, n]\!]$. Calculer la probabilité conditionnelle $\mathbf{P}(X = k \mid N = n)$.

2. Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\mathbf{P}(X = k) = \mathrm{e}^{-\lambda} \left(\dfrac{\lambda}{m}\right)^k \dfrac{1}{k!} \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \lambda^n \left(1 - \frac{1}{m}\right)^n$.

3. Reconnaître la loi suivie par X.

Exercice 10. Deux joueurs lancent successivement et chacun à son tour un dé cubique équilibré. Le gagnant est le premier à obtenir un 6. On note X le numéro du tour auquel le premier 6 est obtenu.

1. Quelle est la loi de X ?

2. Calculer la probabilité que le premier joueur gagne.

Exercice 11. On dispose d'une pièce qui tombe sur pile avec probabilité $\frac{1}{3}$, que l'on lance plusieurs fois. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on note A_k : « Obtenir pile au k-ème lancer ». On considère les variables aléatoire suivantes :

- pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, X_n est égale au nombre de piles obtenus lors des n premiers lancers ;
- U est égale au rang du lancer auquel on obtient le deuxième pile.

1. Quel est l'ensemble des valeurs que peut prendre U ?

2. Déterminer la loi de X_n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

3. Exprimer, pour tout entier $n \geqslant 2$, l'évènement $\{U = n\}$ en fonction de X_{n-1} et de A_n.

4. En déduire la loi de U.

5. Démontrer que U admet une espérance et la calculer.

Exercice 12. On dispose de deux dés cubiques équilibrés. On effectue des lancers de ces deux dés simultanément jusqu'à obtenir au moins un 6. Si on obtient deux 6, on arrête. Sinon, on relance seulement le dé avec lequel on n'a pas obtenu 6 et on continue jusqu'à obtenir 6 avec ce dé. On note X (resp. Y) la variable aléatoire égale au nombre de lancers qu'il faut effectuer pour obtenir un 6 avec le premier (resp. le deuxième) dé.

1. Quelles sont les lois de X et Y ?

2. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbf{P}(X > n) = (\frac{5}{6})^n$.

3. On note Z la variable aléatoire égale au nombre de lancers qu'on effectue en tout.

  a. Justifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, les évènements $\{Z \leqslant n\}$ et $\{X \leqslant n\} \cap \{Y \leqslant n\}$ sont égaux.

  b. En déduire la fonction de répartition de Z.

  c. Déterminer la loi de Z puis son espérance.

Exercice 13.

1. Soit $\lambda > 0$ et $X \hookrightarrow \mathscr{P}(\lambda)$. Calculer $\mathbf{E}\left(\dfrac{1}{X+1}\right)$.
2. Soit $p \in]0\,;1[$ et $X \hookrightarrow \mathscr{B}(n,p)$.
   - **a.** Vérifier que, pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, $\dfrac{1}{k+1}\dbinom{n}{k} = \dfrac{1}{n+1}\dbinom{n+1}{k+1}$.
   - **b.** En déduire l'espérance de $\dfrac{1}{X+1}$.

Exercice 14. Une urne contient b boules blanches et r boules rouges. On y effectue des tirages sans remise et on note Y_n le nombre de boules blanches obtenues après n tirages pour tout entier $n \leqslant b+r$. On note également, pour tout entier $k \leqslant b+r$, X_k la variable aléatoire égale à 1 si on obtient une boule blanche au k-ème tirage et 0 sinon.

1. Si on avait effectué des tirages avec remise, combien aurait-on eu de boules blanches en moyenne sur n tirages ?
2. Déterminer la loi de X_1, son espérance et sa variance.
3. Calculer $\mathbf{P}(X_2 = 1 \mid X_1 = 0)$ et $\mathbf{P}(X_2 = 1 \mid X_1 = 1)$, puis en déduire la loi de X_2.
4. Soit $n \in [\![0, b+r-1]\!]$.
   - **a.** Quel est l'ensemble des valeurs possibles pour X_{n+1} ?
   - **b.** Combien reste-t-il de boules dans l'urne après n tirages ?
   - **c.** Soit $k \in [\![0,n]\!]$ tel que $k \leqslant b$. Si $Y_n = k$, combien de boules blanches et de boules rouges reste-t-il après n tirages ? En déduire $\mathbf{P}(X_{n+1} = 1 \mid Y_n = k)$.
   - **d.** Justifier que :
   $$\mathbf{P}(X_{n+1} = 1) = \sum_{k=0}^{n} \frac{b-k}{b+r-n}\mathbf{P}(Y_n = k)$$
   puis que :
   $$\mathbf{P}(X_{n+1} = 1) = \frac{b - \mathbf{E}(Y_n)}{b+r-n}.$$
5. **a.** Justifier que, pour tout $n \in [\![0, b+r-1]\!]$, $Y_{n+1} = Y_n + X_{n+1}$.
   - **b.** En déduire que pour tout $n \in [\![0, b+r-1]\!]$,
   $$\mathbf{E}(Y_{n+1}) = \mathbf{E}(Y_n) + \frac{b - \mathbf{E}(Y_n)}{b+r-n}.$$
   - **c.** Démontrer par récurrence que, $n \in [\![0, b+r]\!]$, $\mathbf{E}(Y_n) = \dfrac{nb}{b+r}$.
6. Pour tout $n \in [\![1; b+r]\!]$, calculer la probabilité de tirer une boule blanche au n-ème tirage.

Exercice 15.

1. Soit X et Y deux variables aléatoires définies sur le même espace probabilité, indépendantes, suivant des lois de Poisson de paramètres respectifs λ et μ.

   Déterminer la loi de $X+Y$.
2. **a.** Soit $k > 0$. Montrer qu'on ne peut pas trouver des réels strictement positifs a, b, c et d tels que $ab = k$, $cd = k$ et $ac + bd \leqslant k$.
   - **b.** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Peut-on trouver deux variables aléatoires X et Y indépendantes et à valeurs dans $[\![0,n]\!]$ telles que $X+Y$ suive une loi uniforme sur $[\![0,2n]\!]$?