⧫ Chapitre 7. Compléments sur l'intégration

I. — Rappels sur l'intégration des fonctions continues sur un segment

1) Primitives

Définition 1

Soit f une fonction numérique et I un intervalle inclus dans $\mathcal{D}_f$. On appelle **primitive** de f sur I toute fonction définie et dérivable sur I telle que $F' = f$.

Théorème 2

Toute fonction continue sur un intervalle I admet des primitives sur I.

Dans le tableau suivant, a, k et α sont des réels et $n \in \mathbb{N}^*$.

Les primitives de	sont les fonctions	sur
$x \longmapsto a$	$x \longmapsto ax + c$	$\mathbb{R}$
$x \longmapsto x^n$	$x \longmapsto \dfrac{1}{n+1}x^{n+1} + c$	$\mathbb{R}$
$x \longmapsto \dfrac{1}{x^n}$ $(n \geqslant 2)$	$x \longmapsto -\dfrac{1}{(n-1)x^{n-1}} + c$	$]-\infty\,;0[$ ou $]0\,;+\infty[$
$x \longmapsto x^\alpha$ $(\alpha \neq -1)$	$x \longmapsto \dfrac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1} + c$	$]0\,;+\infty[$
$x \longmapsto \dfrac{1}{x}$	$x \longmapsto \ln(\lvert x\rvert) + c$	$]-\infty\,;0[$ ou $]0\,;+\infty[$
$x \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{x}}$	$x \longmapsto 2\sqrt{x} + c$	$]0\,;+\infty[$
$x \longmapsto \mathrm{e}^x$	$x \longmapsto \mathrm{e}^x + c$	$\mathbb{R}$
$x \longmapsto \sin(x)$	$x \longmapsto -\cos x + c$	$\mathbb{R}$
$x \longmapsto \cos(x)$	$x \longmapsto \sin x + c$	$\mathbb{R}$
$x \longmapsto \dfrac{1}{1+x^2}$	$x \longmapsto \arctan(x) + c$	$\mathbb{R}$

Dans le tableau suivant, u désigne une fonction définie et dérivable sur un intervalle I, a, b, c et α sont des réels tels que $a \neq 0$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

Les primitives de	sont les fonctions	sur tout intervalle J
$u'u^n$	$\dfrac{1}{n+1}u^{n+1}+c$	inclus dans I
$\dfrac{u'}{u^n}$ $(n \geqslant 2)$	$-\dfrac{1}{(n-1)u^{n-1}}+c$	inclus dans I et sur lequel u ne s'annule pas
$u'u^\alpha$ $(\alpha \neq -1)$	$\dfrac{1}{\alpha+1}u^{\alpha+1}+c$	inclus dans I et sur lequel u est strictement positive
$\dfrac{u'}{u}$	$\ln(\lvert u\rvert)+c$	inclus dans I et sur lequel u ne s'annule pas
$\dfrac{u'}{\sqrt{u}}$	$2\sqrt{u}+c$	inclus dans I et sur lequel u est strictement positive
$u'\mathrm{e}^u$	e^u+c	inclus dans I
$u'\cos(u)$	$\sin(u)+c$	inclus dans I
$u'\sin(u)$	$-\cos(u)+c$	inclus dans I
$\dfrac{u'}{1+u^2}$	$\arctan(u)+c$	inclus dans I

Exemple 3. Déterminer une primitive de

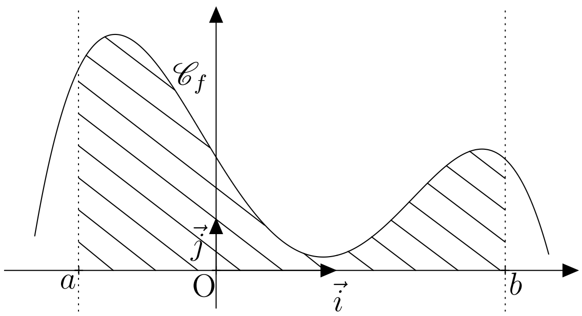
$f : x \longmapsto (2x+3)(x^2+3x)^5$ sur $\mathbb{R}$ $\quad g : x \longmapsto \mathrm{e}^{3x}$ sur $\mathbb{R}$ $\quad h : x \longmapsto \dfrac{x}{x^2+1}$ sur $\mathbb{R}$

$k : x \longmapsto \cos(3x+1)$ sur $\mathbb{R}$ $\quad \ell : x \longmapsto \dfrac{x^3}{(x^4-1)^5}$ sur $]1\,;+\infty[$ $\quad m : x \longmapsto \dfrac{1}{x-3}$ sur $]-\infty\,;3[$

2) Intégrale d'une fonction continue sur un segment

Définition 4

Soit f une fonction **continue et positive** sur un intervalle $[a\,;b]$. On définit l'intégrale de a à b de la fonction f comme l'aire sous la courbe $\mathscr{C}_f$ i.e. la valeur, en unités d'aire, de l'aire de la partie du plan délimitée par la courbe $\mathscr{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$.



Notation 5. L'intégrale de a à b de la fonction f est notée $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

Théorème 6

Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a\,;b]$. Alors, la fonction F définie sur $[a\,;b]$ par $F : x \longmapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est l'unique primitive de f sur $[a\,;b]$ qui s'annule en a.

Corollaire 7

Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a\,;b]$. Si F est une primitive de f sur $[a\,;b]$ alors
$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = F(b) - F(a).$$

Théorème et définition 8

Soit f une fonction continue sur un intervalle I. Soit a et b deux réels appartenant à I. Alors, quelle que soit la primitive F de f, la différence $F(b) - F(a)$ prend la même valeur. Par définition, cette valeur est appelée l'**intégrale de a et b de la fonction** f et on la note $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

Exemple 9. Calculer les intégrales suivantes :

$$I_1 = \int_{-\pi}^{\pi} \sin(t)\,\mathrm{d}t \qquad I_2 = \int_0^{\ln(3)} \mathrm{e}^{\frac{x}{2}}\,\mathrm{d}x \qquad I_3 = \int_{-1}^{1} u^5 - 2u^3 + 2u\,\mathrm{d}u$$

$$I_4 = \int_1^{e} \frac{\ln(x)}{x}\,\mathrm{d}x \qquad I_5 = \int_e^{e^2} \frac{\mathrm{d}t}{t\ln(t)} \qquad I_6 = \int_0^1 \frac{x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x.$$

Propriété 10

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$.

1. **Linéarité de l'intégrale**
   Soit a et b dans I. L'application $f \longmapsto \displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ est une application linéaire de l'espace vectoriel $\mathscr{C}(I,\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$. Autrement dit, pour toutes fonctions f et g continues sur I et pour tous réels λ et μ,
   $$\int_a^b \lambda f(x) + \mu g(x)\,\mathrm{d}x = \lambda\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \mu\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$
2. **Positivité de l'intégrale**
   Si a et b sont deux éléments de I tels que $a \leqslant b$ et si f est une fonction continue sur I telle que $f(x) \geqslant 0$ pour tout $x \in [a\,;b]$ alors $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geqslant 0$.
3. **Croissance de l'intégrale**
   Si a et b sont deux éléments de I tels que $a \leqslant b$ et si f et g sont deux fonctions continues sur I telles que $f(x) \geqslant g(x)$ pour tout $x \in [a\,;b]$ alors $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geqslant \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$.
4. **Relation de Chasles**
   Si a, b et c sont trois éléments quelconques de I alors
   $$\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Propriété 11. — Formule d'intégration par parties

Soit u et v deux fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur un intervalle I. Alors, pour tous réels a et b appartenant à I,

$$\int_a^b u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x.$$

Méthode 12 : Choix de la fonction à intégrer et de celle à dériver

Voici quelques pistes pour que la nouvelle intégrale à calculer soit plus simple :

1. Les fonctions ln et arctan ont pour dérivées des fonctions rationnelles, il est donc a priori intéressant de les dériver.

2. Si P est un polynôme de degré n, non nul, P' est un polynôme de degré $n-1$. On va donc privilégier la dérivation pour les polynômes.

3. Les fonctions $x \longmapsto \mathrm{e}^{ax+b}, x \longmapsto \cos(ax+b), x \longmapsto \sin(ax+b), x \longmapsto (ax+b)^\alpha$ avec $a \neq 0$ et $\alpha \neq -1$ ont des dérivées ou des primitives de même forme, on peut donc indifféremment les intégrer ou les dériver.

Exemple 13.

1. Calculer $I = \displaystyle\int_0^1 x\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$.

2. Déterminer une primitive de ln sur $]0\,;+\infty[$.

3. Calculer $J = \displaystyle\int_0^\pi \sin(x)\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$.

4. Calculer $K = \displaystyle\int_0^{e-1} \ln(1+t)\,\mathrm{d}t$.

Propriété 14. — Formule de changement de variable

Soit u une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur un intervalle I telle que, pour tout $t \in I$, $u(t)$ appartient à un intervalle J. Pour toute fonction f continue sur J et pour tous réels a et b appartenant à I,

$$\int_{u(a)}^{u(b)} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(u(t))u'(t)\,\mathrm{d}t.$$

Remarque 15. Un changement de variable consiste en pratique à poser $x = u(t)$. Lorsque u est bijective, on peut également le donner sous la forme $t = u^{-1}(x)$, ce qui revient en fait à lire la formule de droite à gauche plutôt que de gauche à droite.

Exemple 16. Calculer les intégrales suivantes à l'aide du changement de variable indiqué.

1. $I_1 = \displaystyle\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$, $x = \sin(t)$.

2. $I_2 = \displaystyle\int_0^1 x^2\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$, $x = \sin(t)$.

3. $I_3 = \displaystyle\int_1^2 \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$, $t = \sqrt{x}$.

II. — Fonctions continues par morceaux

1) Définition

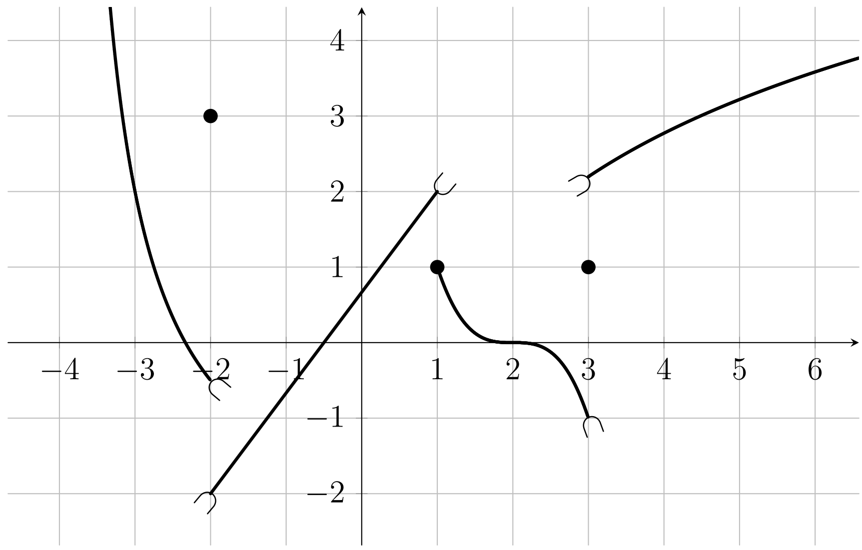
Définition 17

On dit qu'une fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est **continue par morceaux** s'il existe des réels $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$ tels que :

- f est continue sur $]-\infty\,;a_1[$, sur $]a_n\,;+\infty[$ et sur $]a_i\,;a_{i+1}[$ pour tout $i \in [\![1, n-1]\!]$;
- Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, f admet une limite finie à droite et à gauche en a_i.

Remarque 18. Ainsi, une fonction continue par morceaux est une fonction qui est continue sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en quelques points qu'on appelle des points de discontinuité. En chaque point de discontinuité a_i, la fonction admet cependant des limites finies à droite et à gauche, limites qui ne sont pas nécessairement égales et qui ne sont pas non plus nécessairement égale à la valeur de $f(a_i)$.

Exemple 19. Voici un exemple de courbe de fonction continue par morceaux ayant 3 points de discontinuité :



Exemple 20. Les fonctions suivants sont-elles continues par morceaux sur $\mathbb{R}$?

1. $f : x \longmapsto \begin{cases} x^2 \text{ si } x < 1 \\ -1 \text{ si } x = 1 \\ \mathrm{e}^x \text{ si } 1 < x \leqslant 2 \\ \frac{1}{x} \text{ si } x > 2 \end{cases}$ **2.** $g : x \longmapsto \begin{cases} x^2 \text{ si } x < 0 \\ 1 \text{ si } x = 0 \\ \frac{1}{x} \text{ si } x > 0 \end{cases}$

Remarque 21.

1. Une fonction continue sur $\mathbb{R}$ est en particulier une fonction continue par morceaux sur $\mathbb{R}$.
2. Si f est une fonction continue par morceaux sur $\mathbb{R}$ avec $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$ comme points de discontinuité alors, pour tout $i \in [\![1, n-1]\!]$, la restriction f_i de f à $]a_i\,;a_{i+1}[$ se prolonge en une fonction continue sur $[a_i\,;a_{i+1}]$ en posant $f_i(a_i) = \lim\limits_{x\to a_i^+} f(x)$ et $f_i(a_{i+1}) = \lim\limits_{x\to a_{i+1}^-} f(x)$

Propriété 22

L'ensemble $\mathscr{C}_m(\mathbb{R},\mathbb{R})$ des fonctions continues par morceaux sur $\mathbb{R}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

2) Intégrale d'une fonction continue par morceaux

Définition 23

Soit $f \in \mathscr{C}_m(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et a et b deux réels tels que $a \leqslant b$. On suppose qu'entre a et b les points de discontinuité de f sont a_1, a_2, ..., a_k. Alors, on définit :

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^{a_1} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{a_1}^{a_2} f(x)\,\mathrm{d}x + \cdots + \int_{a_k}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

et

$$\int_b^a f(x) = -\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Exemple 24. Calculer $\int_{-1}^{3} f(x)\,\mathrm{d}x$ où f est la fonction définie dans l'exemple 20.

Propriété 25

Toutes les propriétés de l'intégrale des fonctions continues énoncées dans la propriété 10 (linéarité, positivité, croissance, relation de Chasles) restent vraies pour les fonctions continues par morceaux.

Propriété 26

Soit f une fonction continue par morceaux sur $\mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$ et $F : x \longmapsto \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$.

1. La fonction F est continue sur $\mathbb{R}$.

2. La fonction F est dérivable en x si f est continue en x et alors $F'(x) = f(x)$.

3. Si f est positive sur $\mathbb{R}$ alors F est croissante sur $\mathbb{R}$.

III. — Intégrale généralisée en une borne infinie

1) Théorème de la limite monotone pour les fonctions

Théorème 27

1. Si $F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction croissante sur $\mathbb{R}$ alors soit F est majorée et admet une limite finie en $+\infty$ soit F n'est pas majorée et diverge vers $+\infty$ en $+\infty$.

2. Si $F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction décroissante sur $\mathbb{R}$ alors soit F est majorée et admet une limite finie en $-\infty$ soit F n'est pas majorée et diverge vers $+\infty$ en $-\infty$.

2) Intégrale généralisée en $+\infty$

Théorème et définition 28

Soit f une fonction continue par morceaux et positive sur $\mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}$. Alors, la fonction $F : x \longmapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ admet une limite finie ou infinie en $+\infty$.
Cette limite s'appelle l'**intégrale généralisée** (ou impropre) de f sur $[a\,;+\infty[$ et se note $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$.

Définition 29

Soit f une fonction continue par morceaux et positive sur $\mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}$.

- Si $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ est finie, on dit que l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ **converge**.
- Si $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ vaut $+\infty$, on dit que l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ **diverge**.
- Déterminer la **nature** de l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$, c'est déterminer si elle converge ou elle diverge.

Exemple 30. Étudier la nature des intégrales généralisée suivantes et interpréter le résultat en terme d'aire.

$$I_1 = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t \qquad I_2 = \int_1^{+\infty} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t \qquad I_3 = \int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t$$

Théorème 31. — Critère de Riemann

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Alors, l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.

Remarque 32. Dans le critère précédent, la borne 1 dans l'intégrale peut être remplacée par n'importe quel réel $a > 0$.

3) Intégrale généralisée en $-\infty$

Théorème et définition 33

Soit f une fonction continue par morceaux et positive sur $\mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}$. Alors, la fonction $F : x \longmapsto \displaystyle\int_x^a f(t)\,\mathrm{d}t$ admet une limite finie ou infinie en $-\infty$.
Cette limite s'appelle l'**intégrale généralisée** (ou impropre) de f sur $]-\infty\,;a]$ et se note $\displaystyle\int_{-\infty}^a f(t)\,\mathrm{d}t$.

Remarque 34. Soit f une fonction continue par morceaux et positive sur $\mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}$. On dit, comme dans le cas précédent, que l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_{-\infty}^a f(t)\,\mathrm{d}t$ **converge** si $\displaystyle\int_{-\infty}^a f(t)\,\mathrm{d}t$ est finie et qu'elle **diverge** si $\displaystyle\int_{-\infty}^a f(t)\,\mathrm{d}t$ vaut $+\infty$. Déterminer la nature d'une telle intégrale généralisée, c'est déterminer si elle converge ou si elle diverge.

Exemple 35. Étudier la nature des intégrales généralisée suivantes.

$$I_1 = \int_{-\infty}^{0} -t\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t \qquad I_2 = \int_{-\infty}^{0} \frac{-t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \qquad I_3 = \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{(1-t)^2}\,\mathrm{d}t$$

4) Intégrale généralisée sur $\mathbb{R}$

Théorème et définition 36

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue par morceaux et positive. Alors, la valeur de

$$\int_{-\infty}^{a} f(t)\,\mathrm{d}t + \int_{a}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$$

est indépendante de la valeur du réel a.
Cette valeur est appelée l'**intégrale généralisée** de f sur $\mathbb{R}$ et se note $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$.

Remarque 37. Soit f une fonction continue par morceaux et positive sur $\mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}$. On dit, comme dans le cas précédent, que l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ **converge** si $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ est finie et qu'elle **diverge** si $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ vaut $+\infty$. Déterminer la nature d'une telle intégrale généralisée, c'est déterminer si elle converge ou si elle diverge.

On remarquera, de plus, que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge si et seulement s'il existe un réel a tel que les deux intégrales généralisées $\displaystyle\int_{-\infty}^{a} f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_{a}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge.

Exemple 38. Étudier la nature des intégrales généralisée suivantes.

$$I_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} |t|\,\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t \qquad I_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \qquad I_3 = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{t}\,\mathrm{d}t$$

Théorème 39. — admis

L'intégrale généralisée $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t$ converge et

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t = \sqrt{2\pi}.$$

5) Propriétés de l'intégrale généralisée

Propriété 40

Les propriétés de croissance et de positivité de l'intégrale ainsi que la relation de Chasles énoncées dans la propriété 10 restent vraies pour les intégrales généralisées des fonctions continues par morceaux et positives.
La linéarité reste vraie à condition de supposer les réels λ et μ positifs.

6) Intégration par parties

On peut adapter la formule d'intégration par parties en l'utilisant sur un segment en passant à la limite. Il convient dans ce cas de vérifier que les deux nouveaux termes convergent pour assurer la convergence de l'intégrale à calculer.

Exemple 41.

1. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} -te^t \,\mathrm{d}t$ converge et calculer sa valeur.
2. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} \frac{\ln(t)}{t^2} \,\mathrm{d}t$ converge et calculer sa valeur.

7) Changement de variable

Théorème 42

Les lettres a et b désignent des réels ou $-\infty$ ou $+\infty$. Soit φ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ et strictement croissante sur $]a\,;b[$ ayant une limite (finie ou infinie) α en a et une limite (finie ou infinie) β en b. Alors, pour tout fonction f continue et positive sur l'intervalle d'extrémités α et β (borne(s) comprise(s) si α et/ou β sont des réels), les intégrales $\displaystyle\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,\mathrm{d}x$ et $\displaystyle\int_{a}^{b} f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t$ ont la même nature et la même valeur.

Remarque 43.

1. Comme dans le cas de l'intégrale sur un segment, un changement de variable consiste en pratique à poser $x = \varphi(t)$. Comme φ est continue et strictement croissante, elle réalise une bijection de $]a\,;b[$ dans $]\alpha\,;\beta[$ donc on peut également donner le changement de variable sous la forme $t = \varphi^{-1}(x)$.
2. Dans le cadre des intégrales généralisées, les hypothèses sur le changement de variable sont plus restrictives puisqu'on demande à ce que φ soit strictement croissante en plus d'être de classe $\mathscr{C}^1$.

Exemple 44. Calculer $I = \displaystyle\int_{0}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^{2x}}\,\mathrm{d}x$ à l'aide du changement de variable $x = \ln(t)$.

8) Théorèmes de comparaison

Théorème 45

Soit f et g deux fonctions continues par morceaux et positives sur $\mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}$. On suppose que $f(x) \leqslant g(x)$ pour tout $x \in [a\,;+\infty[$. Alors,

1. $\displaystyle\int_{a}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_{a}^{+\infty} g(x)\,\mathrm{d}x$;
2. En particulier,
   - si $\displaystyle\int_{a}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ diverge alors $\displaystyle\int_{a}^{+\infty} g(x)\,\mathrm{d}x$ diverge ;
   - si $\displaystyle\int_{a}^{+\infty} g(x)\,\mathrm{d}x$ converge alors $\displaystyle\int_{a}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ converge.

Remarque 46. On a les énoncés équivalents avec les intégrales de la forme $\displaystyle\int_{-\infty}^{a}$ et $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}$.

Exemple 47.

1. Déterminer la nature de $I = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{2+\cos(x)}{1+x^3}\,\mathrm{d}x$.

2. Même question avec $J = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{2+\cos(x)}{1+x}\,\mathrm{d}x$.

Théorème 48

Soit f et g deux fonctions continues par morceaux et positives sur $\mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}$. On suppose que $f(x) \sim g(x)$ au voisinage de $+\infty$. Alors, les intégrales $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ et $\displaystyle\int_a^{+\infty} g(x)\,\mathrm{d}x$ ont la même nature (mais pas nécessairement la même valeur).

Remarque 49. On a les énoncés équivalents avec les intégrales de la forme $\displaystyle\int_{-\infty}^{a}$ et $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}$.

Exemple 50.

1. Déterminer la nature de $I = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{2x^3-1}\,\mathrm{d}x$.

2. Même question avec $J = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{1+\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$.

IV. — Exercices

Exercice 1. Déterminer si les fonctions suivantes sont continues par morceaux.

1. $f : x \longmapsto \begin{cases} x \text{ si } x < -1 \\ 1 \text{ si } x \in [-1\,;0] \\ \mathrm{e}^{-\frac{1}{x}} \text{ si } x > 0 \end{cases}$ **2.** $g : x \longmapsto \begin{cases} \mathrm{e}^{-\frac{1}{x}} \text{ si } x < 0 \\ 1 \text{ si } x \in [0\,;1] \\ x \text{ si } x > 1 \end{cases}$

Exercice 2. Calculer les intégrales suivantes.

1. $I = \displaystyle\int_{-2}^{3} f(t)\,\mathrm{d}t$ où $f : t \longmapsto \begin{cases} t \text{ si } t < 0 \\ t^2 \text{ si } t \in [0\,;1] \\ \frac{1}{t} \text{ si } t > 1 \end{cases}$

2. $J = \displaystyle\int_{1}^{\mathrm{e}^2} g(t)\,\mathrm{d}t$ où $f : t \longmapsto \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{t}} \text{ si } t \in [1\,;4] \\ \frac{1}{t\ln(t)} \text{ si } t > 4 \end{cases}$

Exercice 3. À l'aide d'une primitive, étudier la nature des intégrales suivantes et déterminer leurs valeurs en cas de convergence.

$$I_1 = \int_1^{+\infty} \frac{\ln(t)}{t}\mathrm{d}t \qquad I_2 = \int_0^{+\infty} \frac{u}{(1+u^2)^2}\mathrm{d}u \qquad I_3 = \int_0^{+\infty} t\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t \qquad I_4 = \int_2^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x\ln(x)}$$

Exercice 4. Calculer $I = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ où $f : t \longmapsto \begin{cases} 0 \text{ si } t < 0 \\ t^2\mathrm{e}^{-t^3} \text{ si } t \geqslant 0 \end{cases}$

Exercice 5. Étudier, en fonction du réel α, la nature de l'intégrale généralisée $I_\alpha = \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\alpha t}\,\mathrm{d}t$.

Exercice 6. Montrer, grâce à une intégration par parties, que l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^3 \mathrm{e}^{-t^2} \mathrm{d}t$ converge et donner sa valeur.

Exercice 7. Soit la fonction f définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = \ln\left(\dfrac{\mathrm{e}^x - 1}{\mathrm{e}^x + 1}\right)$.

1. Donner l'expression de f' sur $]0\,;+\infty[$.

2. En déduire la convergence de l'intégrale $I = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}\mathrm{d}x$ et que $I = \dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{e+1}{e-1}\right)$.

Exercice 8. Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x}{(1+\mathrm{e}^x)^2}$.

1. Donner une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

2. Justifier la convergence de l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^x}{(1+\mathrm{e}^x)^2}\mathrm{d}x$ et précisera sa valeur.

3. Démontrer à l'aide d'une intégration par parties que $J = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x\mathrm{e}^x}{(1+\mathrm{e}^x)^2}\mathrm{d}x = \ln(2)$.

Indication. Après avoir intégré par parties, écrire que $\dfrac{1}{1+\mathrm{e}^x} = \dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^{-x}+1}$ pour calculer l'intégrale restante.

Exercice 9. Pour tout entier naturel n et pour tout réel positif A, on pose :

$$I_n(A) = \int_0^A t^n \mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t.$$

1. Calculer, pour tout $A > 0$, $I_0(A)$ et en déduire que l'intégrale $I_0 = \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t$ converge et donner sa valeur.

2. **a.** Soit $A > 0$ et $n \in \mathbb{N}$. Déterminer, à l'aide d'une intégration par parties, une relation entre $I_{n+1}(A)$ et $I_n(A)$.

b. En déduire, par récurrence, que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^n \mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t$ converge. On note I_n cette intégrale.

c. Soit $n \in \mathbb{N}$. Écrire la relation liant I_{n+1} et I_n puis en déduire une expression de I_n en fonction de n.

Exercice 10.

1. Montrer que pour tout $t \geqslant 1$, $\dfrac{1}{t(1+t^2)} = \dfrac{1}{t} - \dfrac{t}{1+t^2}$.

2. En déduire la valeur de $I = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t(1+t^2)}\mathrm{d}t$.

Exercice 11. En utilisant une intégration par parties, montrer la convergence et calculer la valeur des intégrales suivantes. (Pour J, on pourra utiliser le résultat de l'exercice précédent.)

$$I = \int_1^{+\infty} \frac{\ln(1+t^2)}{t^2}\,\mathrm{d}t \qquad J = \int_1^{+\infty} \frac{\arctan(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t.$$

Exercice 12. En utilisant un changement de variable simple, calculer $I = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x$.

Exercice 13. En utilisant le changement de variable indiqué, étudier la nature des intégrales ci-dessous et calculer leurs valeurs en cas de convergence.

$$I = \int_2^{+\infty} \frac{1}{t^2+4}\mathrm{d}t \quad (t = 2u) \qquad J = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^{2x}}\mathrm{d}x \quad (x = \ln(t))$$

$$K = \int_1^{+\infty} \frac{1}{x(1+(\ln(x))^2)}\mathrm{d}x \quad (t = \ln(x)) \qquad L = \int_1^{+\infty} \frac{1}{x\sqrt{x^2+1}}\mathrm{d}x \quad \left(u = \sqrt{x^2+1}\right)$$

Pour le calcul de L, une fois le changement de variable effectué, on pourra remarquer que, pour tout $u > 1$, $\dfrac{1}{u^2-1} = \dfrac{1-u+u}{u^2-1}$.

Exercice 14. Déterminer la nature des intégrales généralisées suivantes.

$$I_1 = \int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{t}}{t^2+1}\,\mathrm{d}t \qquad I_2 = \int_1^{+\infty} \frac{\sin^2(t)}{t^3}\,\mathrm{d}t \qquad I_3 = \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t}$$

$$I_4 = \int_1^{+\infty} \frac{\ln(t)}{t}\,\mathrm{d}t \qquad I_5 = \int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2+t}\,\mathrm{d}t \qquad I_6 = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{4+t+t^2}$$

Exercice 15. Dans chaque cas, justifier la convergence de l'intégrale et calculer sa valeur.

$$I = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-2t}\,\mathrm{d}t \qquad J = \int_0^{+\infty} t\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t \qquad K = \int_1^{+\infty} \frac{\ln(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t \qquad L \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{t^2+t+1}\,\mathrm{d}t.$$

Pour L, on pourra commencer par remarquer que, pour tout réel t, $t^2+t+1 = (t+\frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}$ puis effectuer le changement de variable $t = \frac{\sqrt{3}}{2}u - \frac{1}{2}$.

Exercice 16. On considère l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} t\mathrm{e}^{-\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$.

1. Soit $a > 0$, $I_a = \displaystyle\int_0^{a} t\mathrm{e}^{-\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$ et $J_a = \displaystyle\int_0^{\sqrt{a}} u^3\mathrm{e}^{-u}\,\mathrm{d}u$.

  a. Montrer, à l'aide du changement de variable $t = u^2$, que $I_a = 2J_a$.

  b. À l'aide d'intégrations par parties, montrer que

$$J_a = 6 - \left(\sqrt{a}^3 + 3a + 6\sqrt{a} + 6\right)\mathrm{e}^{-\sqrt{a}}.$$

2. En déduire que I est convergente et déterminer sa valeur.

Exercice 17. Pour $a > 1$, on pose $I_a = \displaystyle\int_1^{a} \frac{\ln(t)}{(1+t)^3}\,\mathrm{d}t$

1. À l'aide d'une intégration par parties, montrer que $I_a = \dfrac{-\ln(a)}{2(1+a)^2} + \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_1^a \frac{\mathrm{d}t}{t(1+t)^2}$.

2. **a.** Montrer que, pour tout réel $t > 0$, $\dfrac{1}{t(1+t)^2} = \dfrac{1}{t} - \dfrac{1}{1+t} - \dfrac{1}{(1+t)^2}$

  b. En déduire une primitive de $t \longmapsto \dfrac{1}{t(1+t)^2}$ sur $]0\,;+\infty[$.

3. Déduire des questions précédentes que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln t}{(1+t)^3}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\ln(2) - \frac{1}{4}$