⧫ Chapitre 6. Applications linéaires

Dans tout le chapitre, K désigne l'ensemble $\mathbb{R}$ ou l'ensemble $\mathbb{C}$.

I. — Définitions et propriétés générales

1) Définition

Définition 1

Soit E et F deux K-espaces vectoriels. Une **application linéaire** de E dans F est une fonction $f : E \longrightarrow F$ compatible avec les opérations d'espaces vectoriels c'est-à-dire telle que :

- $\forall (u\,;v) \in E^2\ f(u+v) = f(u) + f(v)$;
- $\forall v \in E, \forall \lambda \in K,\ f(\lambda v) = \lambda f(v)$.

L'ensemble des applications linéaires de E dans F se note $\mathscr{L}(E, F)$.

⚠ On prendra garde au fait que dans l'égalité $f(u+v) = f(u) + f(v)$, le « + » à gauche représente l'addition dans E alors que le « + » à droite représente l'addition dans F.

Remarque 2. Dans la pratique, on peut montrer qu'une application est linéaire en montrant que, pour tout $(u\,;v) \in E^2$ et tout $\lambda \in K$, $f(\lambda u + v) = \lambda f(u) + f(v)$.

Exemple 3.

1. Pour tout réel a, $f_1 : x \longmapsto ax$ est une application linéaire de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
2. $f_2 : P \longmapsto P'$ est une application linéaire de $\mathbb{R}[X]$ dans $\mathbb{R}[X]$.
3. $f_3 : A \longmapsto {}^tA$ est une application linéaire de $\mathscr{M}_n(K)$ dans $\mathscr{M}_n(K)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
4. $f_4 : g \longmapsto \displaystyle\int_0^1 g(t)\,\mathrm{d}t$ est une application linéaire du $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions continues sur $[0\,;1]$ dans $\mathbb{R}$.
5. $f_5 : (x\,;y\,;z) \longmapsto (x-y+z\,;2x-3y-z)$ est une application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$.
6. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $k \in [\![1, n]\!]$, $p_k : (x_1, x_2, ..., x_n) \longmapsto x_k$ est une application linéaire de K^n dans K appelée la k-ième projection.
7. Si E est un espace vectoriel alors $\mathrm{id}_E : v \longmapsto v$ est une application linéaire de E dans lui-même.
8. Si E est un espace vectoriel alors l'application nulle $v \longmapsto 0_E$ est une application linéaire de E dans lui-même.
9. Si Ω est un univers fini, l'espérance est une application linéaire du $\mathbb{R}$-espace vectoriel des variables aléatoires réelles sur Ω dans $\mathbb{R}$.
10. $f : x \longmapsto x^2$ n'est pas une application linéaire de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
11. $\det : A \longmapsto \det(A)$ n'est pas une application linéaire de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$.

Propriété 4

Soit E et F deux K-espaces vectoriels et $f \in \mathscr{L}(E,F)$.

1. $f(0_E) = 0_F$.
2. Pour tout $v \in E$, $f(-v) = -f(v)$.
3. L'image d'une combinaison de vecteurs de E est la combinaison linéaire des images avec les mêmes coefficients. Autrement dit,

$$\forall (v_1, v_2, ..., v_p) \in E^p,\ \forall (\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_p) \in K^p,\ f\left(\sum_{k=1}^{p} \lambda_k v_k\right) = \sum_{k=1}^{p} \lambda_k f(v_k).$$

Démonstration.

1. $f(0_E) = f(0_E + 0_E) = f(0_E) + f(0_E) = 2f(0_E)$ donc $f(0_E) = 0_F$.
2. Soit $v \in E$. Alors, $f(v) = f((-1)v) = (-1)f(v) = -f(v)$.
3. Considérons, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, la proposition $\mathcal{P}(p)$: « pour tout $(v_1, v_2, ..., v_p) \in E^p$ et pour tout $(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_p) \in K^p$, $f\left(\sum_{k=1}^{p} \lambda_k v_k\right) = \sum_{k=1}^{p} \lambda_k f(v_k)$ ».

Initialisation. Soit $v_1 \in E$ et $\lambda_1 \in K$. Alors, par linéarité de f,

$$f\left(\sum_{k=1}^{1} \lambda_k v_k\right) = f(\lambda_1 v_1) = \lambda_1 f(v_1) = \sum_{k=1}^{1} \lambda_k f(v_k)$$

donc $\mathcal{P}(1)$ est vraie.

Hérédité. Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Supposons que $\mathcal{P}(p)$ est vraie. Considérons $(v_1, v_2, ..., v_p, v_{p+1}) \in E^{p+1}$ et $(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_{p+1}) \in K^{p+1}$. Alors, par linéarité de f,

$$f\left(\sum_{k=1}^{p+1} \lambda_k v_k\right) = f\left(\sum_{k=1}^{p} \lambda_k v_k + \lambda_{p+1} v_{p+1}\right) = f\left(\sum_{k=1}^{p} \lambda_k v_k\right) + f(\lambda_{p+1} v_{p+1}).$$

Comme $\mathcal{P}(p)$ est vraie, $f\left(\sum_{k=1}^{p} \lambda_k v_k\right) = \sum_{k=1}^{p} \lambda_k f(v_k)$ et, par linéarité de f, $f(\lambda_{p+1} v_{p+1}) = \lambda_{p+1} f(v_{p+1})$ donc

$$f\left(\sum_{k=1}^{p+1} \lambda_k v_k\right) = \sum_{k=1}^{p} \lambda_k f(v_k) + \lambda_{p+1} f(v_{p+1}) = \sum_{k=1}^{p+1} \lambda_k f(v_k)$$

et on conclut que $\mathcal{P}(p+1)$ est vraie.

Conclusion. Par le principe de récurrence, $\mathcal{P}(p)$ est vraie pour tout $p \in \mathbb{N}^*$.

Ainsi,

$$\forall (v_1, v_2, ..., v_p) \in E^p,\ \forall (\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_p) \in K^p,\ f\left(\sum_{k=1}^{p} \lambda_k v_k\right) = \sum_{k=1}^{p} \lambda_k f(v_k).$$

$\square$

Définition 5

Soit E et F deux K-espaces vectoriels.

1. Un **endomorphisme** de E est une application linéaire de E dans lui-même. On note $\mathscr{L}(E)$ l'ensemble des endomorphismes de E.
2. Un **isomorphisme** de E dans F est une application linéaire bijective de E dans F.
3. Un **automorphisme** de E est une application linéaire bijective de E dans lui-même c'est-à-dire une application qui est à la fois un endomorphisme de E et un isomorphisme.

Exemple 6.

1. Montrer que $f : (x\,;y\,;z) \longmapsto (x+y+z\,;x-y+z\,;x+z)$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ qui n'est pas un isomorphisme.
2. Montrer que $g : (a\,;b\,;c) \longmapsto aX^2+bX+c$ est un isomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}_2[X]$.
3. Montrer que $h : (x\,;y) \longmapsto (x+y\,;x-y)$ est un automorphisme de $\mathbb{R}^2$.

Solution.

1. Soit $v_1 = (x_1, y_1, z_1)$ et $v_2 = (x_2, y_2, z_2)$ deux éléments de $\mathbb{R}^3$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors, $\lambda v_1 + v_2 = (\lambda x_1 + x_2, \lambda y_1 + y_2, \lambda z_1 + z_2)$ donc

$$\begin{aligned} f(\lambda v_1 + v_2) &= (\lambda x_1 + x_1 + \lambda y_1 + y_2 + \lambda z_1 + z_2, \lambda x_1 + x_1 - (\lambda y_1 + y_2) + \lambda z_1 + z_2, \\ &\qquad \lambda x_1 + x_1 + \lambda z_1 + z_2) \\ &= \lambda(x_1 + y_1 + z_1, x_1 - y_1 + z_1, x_1 + z_1) + (x_2 + y_2 + z_2, x_2 - y_2 + z_2, x_2 + z_2) \\ &= \lambda f(v_1) + f(v_2) \end{aligned}$$

   donc f est une application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans lui-même. Ainsi, f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$.
   De plus, $f(0,0,0) = f(1,0,-1) = (0,0,0)$ donc f n'est pas injective et ainsi f n'est pas un isomorphisme.

2. Soit $v_1 = (a_1, b_1, c_1)$ et $v_2 = (a_2, b_2, c_2)$ deux éléments de $\mathbb{R}^3$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors, $\lambda v_1 + v_2 = (\lambda a_1 + a_2, \lambda b_1 + b_2, \lambda c_1 + c_2)$ donc

$$\begin{aligned} g(\lambda v_1 + v_2) &= (\lambda a_1 + a_2)X^2 + (\lambda b_1 + b_2)X + (\lambda c_1 + c_2) \\ &= \lambda(a_1X^2 + b_1X + c_1) + (a_2X^2 + b_2X + c_2) \\ &= \lambda g(v_1) + g(v_2) \end{aligned}$$

   donc g est une application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}_2[X]$.
   De plus, par théorème, pour tout $P \in \mathbb{R}_2[X]$, il existe un unique $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ tel que $P = aX^2 + bX + c$ i.e. tel que $P = g(a,b,c)$ donc g est bijective.
   On conclut que g est un isomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}_2[X]$.

3. Soit $v_1 = (x_1, y_1)$ et $v_2 = (x_2, y_2)$ deux éléments de $\mathbb{R}^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors, $\lambda v_1 + v_2 = (\lambda x_1 + x_2, \lambda y_1 + y_2)$ donc

$$\begin{aligned} h(\lambda v_1 + v_2) &= (\lambda x_1 + x_2 + \lambda y_1 + y_2, \lambda x_1 + x_2 - (\lambda y_1 + y_2)) \\ &= \lambda(x_1 + y_1, x_1 - y_1) + (x_2 + y_2, x_2 - y_2) \\ &= \lambda h(v_1) + h(v_2) \end{aligned}$$

donc h est une application linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans lui-même : c'est donc un endomorphisme de $\mathbb{R}^2$.
Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. Alors, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\begin{aligned} h(x,y) = (a,b) \iff (x+y, x-y) = (a,b) &\iff \begin{cases} x+y=a & L_1 \\ x-y=b & L_2 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x+y=a & L_1 \\ -2y = b-a & L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x = \dfrac{a+b}{2} \\ y = \dfrac{a-b}{2} \end{cases} \end{aligned}$$

Ainsi, (a,b) possède un unique antécédent par h dans $\mathbb{R}^2$ donc h est bijective. On conclut donc que h est un automorphisme de $\mathbb{R}^2$.

2) Opérations

Propriété 7. — Combinaisons linéaires

Soit E et F deux K-espaces vectoriels, $f \in \mathscr{L}(E,F)$ et $g \in \mathscr{L}(E,F)$.
Pour tous réels α et β, $\alpha f + \beta g \in \mathscr{L}(E,F)$.

Démonstration. Soit $(\alpha,\beta) \in K^2$. Soit $(u,v) \in E^2$ et $\lambda \in K$. Alors,

$$\begin{aligned} (\alpha f + \beta g)(\lambda u + v) &= \alpha f(\lambda u + v) + \beta g(\lambda u + v) \\ &= \alpha(\lambda f(u) + f(v)) + \beta(\lambda g(u) + g(v)) \\ &= \lambda(\alpha f(u) + \beta g(u)) + \alpha f(v) + \beta g(v) \\ &= \lambda(\alpha f + \beta g)(u) + (\alpha f + \beta g)(v) \end{aligned}$$

donc $\alpha f + \beta g \in \mathscr{L}(E,F)$. □

Remarque 8. On déduit de la propriété précédente que $\mathscr{L}(E,F)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{F}(E,F)$.

Propriété 9. — Composition

Soit E, F et G des K-espaces vectoriels, $f \in \mathscr{L}(E,F)$ et $g \in \mathscr{L}(F,G)$.
Alors, $g \circ f \in \mathscr{L}(E,G)$.

Démonstration. Soit $(u,v) \in E^2$ et $\lambda \in K$. Alors, en utilisant la linéarité de f puis celle de g, il vient :

$$(g\circ f)(\lambda u+v) = g(f(\lambda u+v)) = g(\lambda f(u)+f(v)) = \lambda g(f(u))+g(f(v)) = \lambda(g\circ f)(u)+(g\circ f)(v)$$

donc $g \circ f \in \mathscr{L}(E,G)$. □

Exemple 10. En reprenant les applications de l'exemple 6, déterminer l'application $g \circ f$.

Solution. Pour tout $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$,

$$(g\circ f)(x,y,z) = g(f(x,y,z)) = g(x+y+z, x-y+z, x+z) = (x+y+z)X^2+(x-y+z)X+x+z.$$

Propriété 11. — Réciproque

Soit E et F deux K-espaces vectoriels. Si f est un isomorphisme de E dans F alors f^{-1} est un isomorphisme F dans E.

Exemple 12. En reprenant les applications de l'exemple 6, déterminer les applications g^{-1} et h^{-1}.

Solution. Soit $P \in \mathbb{R}_2[X]$. Alors, il existe un unique $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tel que $P = aX^2 + bX + c$. De plus,

- $c = P(0)$;
- $P' = 2aX + b$ donc $b = P'(0)$;
- $P'' = 2a$ donc $a = \frac{1}{2}P''(0)$.

Ainsi, l'unique antécédent de P par g est $(\frac{1}{2}P''(0), P'(0), P(0))$ donc

$$g^{-1} : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_2[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ P & \longmapsto & \left(\frac{1}{2}P''(0), P'(0), P(0)\right) \end{array}$$

Pour ce qui est de h, la recherche d'antécédent effectué dans l'exemple 6 montre que

$$h^{-1} : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & \longmapsto & \left(\frac{x+y}{2}, \frac{x-y}{2}\right) \end{array}$$

3) Noyau et image d'une application linéaire

a) Noyau et lien avec l'injectivité

Définition 13

Soit E et F deux K-espaces vectoriels et $f \in \mathscr{L}(E, F)$. L'ensemble

$$\{u \in E \mid f(u) = 0_F\}$$

est appelé le **noyau** de f et se note $\ker(f)$ (ou $\ker f$).

Remarque 14.

1. Le noyau d'une application linéaire $f : E \longrightarrow F$ est donc l'ensemble des antécédents de 0_F par f.
2. Étant donné que si $f \in \mathscr{L}(E, F)$, $f(0_E) = 0_F$, 0_E est toujours un élément de $\ker(f)$ et en particulier $\ker(f)$ n'est jamais vide.

Propriété 15

Soit E et F deux K-espaces vectoriels et $f \in \mathscr{L}(E, F)$. Alors, $\ker(f)$ est un sous-espace vectoriel de E.

Démonstration. Par définition, $\ker(f) \subset E$ et, comme $f(0_E) = 0_F$, $0_E \in \ker(f)$.

Soit $(u, v) \in \ker(f)^2$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Alors, comme f est linéaire,

$$f(\lambda u + v) = \lambda f(u) + f(v) = \lambda 0_F + 0_F = 0_F$$

donc $\lambda u + v \in \ker(f)$.

Ainsi, $\ker(f)$ est un sous-espace vectoriel de E. $\square$

Propriété 16

Soit E et F deux K-espaces vectoriels et $f \in \mathscr{L}(E, F)$. Alors, f est injective si et seulement si $\ker(f) = \{0_E\}$.

Démonstration. Supposons que f est injective. Soit $v \in \ker(f)$. Alors, $f(v) = 0_F = f(0_E)$ donc, comme f est injective, $v = 0_E$. Ainsi, $\ker(f) \subset \{0_E\}$. Or, $\{0_E\} \subset \ker(f)$ donc on conclut que $\ker(f) = \{0_E\}$.

Réciproquement, supposons que $\ker(f) = \{0_E\}$. Soit u et v deux vecteurs de E tels que $f(u) = f(v)$. Alors, $f(u) - f(v) = 0_F$ donc, comme f est linéaire, $f(u - v) = 0_F$. Ainsi, $u - v \in \ker(f)$ donc, comme $\ker(f) = \{0_E\}$, $u - v = 0_E$ et donc $u = v$. Ainsi, on conclut que f est injective.

Par double implication, on a montré que f est injective si et seulement si $\ker(f) = \{0_E\}$. □

Exemple 17.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer le noyau de l'endomorphisme f de $\mathbb{R}_n[X]$ défini par $f : P \longmapsto P'$. Que peut-on en déduire ?
2. Déterminer le noyau de l'endomorphisme g de $\mathbb{R}^3$ défini par

$$g : (x\,;y\,;z) \longmapsto (x + y + z\,;x - y + z\,;x + y - z)\,.$$

   Que peut-on en déduire ?
3. Déterminer la noyau de l'aplication linéaire $h : (x\,;y\,;z) \longmapsto (x + 2y\,;2x - y)$ de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$. Que peut-on en déduire ?

Solution.

1. Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$. Alors, $P \in \ker(f)$ si et seulement si $P' = 0$ ce qui équivaut à dire que P est constant. Ainsi, $\ker(f) = \mathbb{R}_0[X]$.
   Comme $\ker(f) \neq \{0_E\}$, on conclut que f n'est pas injective.
2. Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Alors,

$$(x, y, z) \in \ker(g) \iff \begin{cases} x + y + z = 0 & L_1 \\ x - y + z = 0 & L_2 \\ x + y - z = 0 & L_3 \end{cases} \iff \begin{cases} x + y + z = 0 & L_1 \\ \quad -2y \quad\;\; = 0 & L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ \qquad\; -2z = 0 & L_3 \leftarrow L_3 - L_2 \end{cases}$$

   On obtient un système échelonné avec 3 pivots donc il s'agit d'un système de Cramer et, comme il est homogène, l'unique solution est $(0, 0, 0)$. Ainsi, $\ker(g) = \{(0, 0, 0)\}$.
   On en déduit que g est injective.
3. Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Alors,

$$(x, y, z) \in \ker(g) \iff \begin{cases} x + 2y = 0 & L_1 \\ 2x - y = 0 & L_2 \end{cases} \iff \begin{cases} x + 2y = 0 & L_1 \\ \quad -5y = 0 & L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \end{cases}$$

   Le système échelonné 2×2 obtenu a 2 pivots donc il s'agit d'un système de Cramer et, comme il est homogène, l'unique solution de ce système est $(x, y) = (0, 0)$. Ainsi, $\ker(g) = \{(0, 0, z) \mid z \in \mathbb{R}\}$.
   Comme $\ker(g) \neq \{(0, 0, 0)\}$, on en déduit que g n'est pas injective.

b) Image et lien avec la surjectivité

Définition 18

Soit E et F deux K-espaces vectoriels et $f \in \mathscr{L}(E, F)$. L'image directe de E par f, c'est-à-dire

$$\{f(u) \mid u \in E\} = \{v \in F \mid \exists u \in E \ v = f(u)\}$$

est appelée l'**image** de f et se note $\operatorname{Im}(f)$ (ou $\operatorname{Im} f$).

Remarque 19. Étant donné que si $f \in \mathscr{L}(E, F)$, $f(0_E) = 0_F$, 0_F est toujours un élément de $\operatorname{Im}(f)$ et en particulier $\operatorname{Im}(f)$ n'est jamais vide.

Propriété 20

Soit E et F deux K-espaces vectoriels et $f \in \mathscr{L}(E, F)$. Alors, $\operatorname{Im}(f)$ est un sous-espace vectoriel de F.

Démonstration. Par définition, $\operatorname{Im}(f) \subset F$ et, comme $0_F = f(0_E)$, $0_F \in \operatorname{Im}(f)$.

Soit $(v_1, v_2) \in \operatorname{Im}(f)^2$ et $\lambda \in K$. Alors, par définition, il existe $(u_1, u_2) \in E^2$ tel que $f(u_1) = v_1$ et $f(u_2) = v_2$. Dès lors, par linéarité de f,

$$\lambda v_1 + v_2 = \lambda f(u_1) + f(u_2) = f(\lambda u_1 + u_2).$$

Or, comme E est un espace vectoriel $\lambda u_1 + u_2 \in E$ donc $\lambda v_1 + v_2$ possède un antécédent par f dans E et ainsi $\lambda v_1 + v_2 \in \operatorname{Im}(f)$.

On conclut donc que $\operatorname{Im}(f)$ est un sous-espace vectoriel de F. $\square$

Propriété 21

Soit E et F deux K-espaces vectoriels et $f \in \mathscr{L}(E, F)$. Alors, f est surjective si et seulement si $\operatorname{Im}(f) = F$.

Démonstration. Supposons que f est surjective. Soit $v \in F$. Alors, il existe $u \in E$ tel que $v = f(u)$ donc $v \in \operatorname{Im}(f)$. Ainsi, $F \subset \operatorname{Im}(f)$. Or, $\operatorname{Im}(f) \subset F$ donc, par double inclusion, $\operatorname{Im}(f) = F$.

Réciproquement, supposons que $\operatorname{Im}(f) = F$. Soit $v \in F$. Alors, $v \in \operatorname{Im}(f)$ donc il existe $u \in E$ tel que $v = f(u)$ donc f est surjective.

Par double implication, on a montré que f est surjective si et seulement si $\operatorname{Im}(f) = F$. $\square$

Exemple 22. Déterminer les images des applications linéaires de l'exemple 17. Que peut-on en déduire dans chaque cas ?

Solution.

1. Pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$, $\deg(P') \leqslant n-1$ donc $\operatorname{Im}(f) \subset \mathbb{R}_{n-1}[X]$. Réciproquement, soit $Q \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$. Notons P une primitive de Q sur $\mathbb{R}$. Alors, $P \in \mathbb{R}_n[X]$ et $P' = Q$ i.e. $f(P) = Q$ donc $Q \in \operatorname{Im}(f)$.
   Par le principe de double inclusion, on conclut que $\operatorname{Im}(f) = \mathbb{R}_{n-1}[X]$.
   Comme $\operatorname{Im}(f) \neq \mathbb{R}_n[X]$, on en déduit que f n'est pas surjective.

2. Soit $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$. Alors, pour tout $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$,

$$g(x,y,z) = (a,b,c) \iff \begin{cases} x+y+z=a & L_1 \\ x-y+z=b & L_2 \\ x+y-z=c & L_3 \end{cases} \iff \begin{cases} x+y+z=a & L_1 \\ \quad -2y \quad = b-a & L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ \qquad -2z = c-a & L_3 \leftarrow L_3 - L_2 \end{cases}$$

On obtient un système échelonné avec 3 pivots donc il s'agit d'un système de Cramer : il possède donc une solution dans $\mathbb{R}^3$. Ainsi, $(a,b,c) \in \mathrm{Im}(g)$ donc $\mathrm{Im}(g) = \mathbb{R}^3$. On conclut que g est surjective.

3. Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. Alors, pour tout $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$,

$$h(x,y,z) = (a,b) \iff \begin{cases} x+2y=a & L_1 \\ 2x-y=b & L_2 \end{cases} \iff \begin{cases} x+2y=a & L_1 \\ \quad -5y = b-2a & L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \end{cases}$$

Le système échelonné 2×2 obtenu a 2 pivots donc il s'agit d'un système de Cramer et ainsi ce système admet une solution (x_0,y_0) Alors, pour tout $z \in \mathbb{R}$, (x_0,y_0,z) est un antécédent de (a,b) par h donc $\mathrm{Im}(h) = \mathbb{R}^2$. Ainsi, h est surjective.

II. — Applications linéaires en dimension finie

1) Image d'une base par une application linéaire

Théorème 23

Soit E et F deux K-espaces vectoriels de dimensions finies. Alors, une application linéaire $f : E \longrightarrow F$ est entièrement déterminée par l'image d'une base de E.

Démonstration. Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, ..., e_n)$ une base de E. Soit $f \in \mathscr{L}(E,F)$. Supposons que $f(e_1) = v_1$, $f(e_2) = v_2$, ..., $f(e_n) = v_n$. Soit $u \in E$. Alors, comme $\mathcal{B}$ est une base de E, il existe des scalaires λ_1, λ_2, ..., λ_n tels que $u = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k$. Dès lors, par la Propriété 4,

$$f(u) = f\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k f(e_k) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k v_k.$$

Ainsi, les valeurs de f sont entières déterminées par les valeurs de v_1, v_2, ..., v_n donc par les images des vecteurs de $\mathcal{B}$ par f. $\square$

Remarque 24. Une autre façon d'énoncer le théorème précédent est la suivante : si $(e_1, e_2, ..., e_n)$ est une base de E et si f et g sont deux éléments de $\mathscr{L}(E,F)$ alors $f = g$ si et seulement si, pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, $f(e_i) = g(e_i)$.

Propriété 25

Soit E et F deux K-espaces vectoriels de dimensions finies et $f \in \mathscr{L}(E,F)$. Si $(e_1, e_2, ..., e_n)$ est une base de E alors $(f(e_1), f(e_2), ..., f(e_n))$ est une famille génératrice de $\mathrm{Im}(f)$.
En particulier, $\dim(\mathrm{Im}(f)) \leqslant \dim(E)$.

Démonstration. La démonstration du théorème précédent assure que, pour tout vecteur $u \in E$, $f(u) \in \text{Vect}(f(e_1), f(e_2), ..., f(e_n))$ donc $\text{Im}(f) \subset \text{Vect}(f(e_1), f(e_2), ..., f(e_n))$. Or, pour tout entier $k \in [\![1, n]\!]$, $f(e_k) \in \text{Im}(f)$ donc, comme l'ensemble $\text{Im}(f)$ est un espace vectoriel, $\text{Vect}(f(e_1), f(e_2), ..., f(e_n)) \subset \text{Im}(f)$. Ainsi, $\text{Im}(f) = \text{Vect}(f(e_1), f(e_2), ..., f(e_n))$ donc $(f(e_1), f(e_2), ..., f(e_n))$ est une famille génératrice de $\text{Im}(f)$.

On en déduit que $\dim(\text{Im}(f)) \leqslant \text{Card}(\{f(e_1), f(e_2), ..., f(e_n)\}) \leqslant n$ et ainsi on conclut que $\dim(\text{Im}(f)) \leqslant \dim(E)$. □

Remarque 26. En général, $(f(e_1), f(e_2), ..., f(e_n))$ n'est pas libre et n'est donc pas une base de $\text{Im}(f)$.

Exemple 27. Déterminer une famille génératrice de l'image des applications linéaires de l'exemple 17. Dans chaque cas, déterminer s'il s'agit d'une base.

Solution.

1. La base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$ est $(1, X, X^2, ..., X^n)$ donc une famille génératrice de $\text{Im}(f)$ est $(0, 1, 2X, ..., nX^{n-1})$. Il ne s'agit pas d'une base car elle contient le vecteur nul donc elle n'est pas libre.

2. La base canonique de $\mathbb{R}^3$ est $((1,0,0), (0,1,0), (0,0,1))$. Or, $g(1,0,0) = (1,1,1)$, $g(0,1,0) = (1,-1,1)$ et $g(0,0,1) = (1,1,-1)$ donc une famille génératrice de $\text{Im}(g)$ est la famille $\mathcal{F} = ((1,1,1), (1,-1,1), (1,1,-1))$. Or, on a vu que $\text{Im}(g) = \mathbb{R}^3$ donc, comme $\mathcal{F}$ est une famille génératrice composée de 3 vecteurs dans un espace de dimension 3, $\mathcal{F}$ est une base de $\text{Im}(g) = \mathbb{R}^3$.

3. De même, $h(1,0,0) = (1,2)$, $h(0,1,0) = (2,-1)$ et $h(0,0,1) = (0,0)$ donc une famille génératrice de $\text{Im}(h)$ est $((1,2), (2,-1), (0,0))$. Cette famille n'est pas libre car elle contient le vecteur nul donc ce n'est pas une base de $\text{Im}(h)$.

Propriété 28

Soit E et F deux K-espaces vectoriels de dimensions finies et $f \in \mathscr{L}(E, F)$. On suppose que $(e_1, e_2, ..., e_n)$ est une base de E.

1. La famille $(f(e_1), f(e_2), ..., f(e_n))$ est libre si et seulement si f est injective.

2. La famille $(f(e_1), f(e_2), ..., f(e_n))$ est génératrice de F si et seulement si f est surjective.

3. f est un isomorphisme si et seulement si $(f(e_1), f(e_2), ..., f(e_n))$ est une base de F.

Démonstration.

1. Supposons que $(f(e_1), f(e_2), ..., f(e_n))$ est libre.

Soit $u \in \ker(f)$. Alors, comme $(e_1, e_2, ..., e_n)$ est une base E, il existe des scalaires λ_1, λ_2, ..., λ_n tels que $u = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k$. Alors, comme $u \in \ker(f)$ et f est linéaire,

$$0_F = f(u) = f\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k f(e_k).$$

Or, la famille $(f(e_1), f(e_2), ..., f(e_n))$ est libre donc $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0$ et donc $u = 0_E$. Ainsi, $\ker(f) = \{0_E\}$ donc f est injective.

Réciproquement, supposons que f est injective.

Soit $(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n) \in K^n$ tel que $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k f(e_k) = 0_F$. Alors, comme f est une application linéaire, $f\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k\right) = 0_F$ donc $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k \in \ker(f)$. Or, f est injective donc $\ker(f) = \{0_E\}$ et ainsi $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k = 0_E$. De plus, $(e_1, e_2, ..., e_n)$ est une base de E donc c'est une famille libre donc $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0$. Ainsi, $(f(e_1), f(e_2), ..., f(e_n))$ est libre.
Par double implication, on a bien montré l'équivalence.

2. Par la Propriété 25, $(f(e_1), f(e_2), ..., f(e_n))$ est une famille génératrice de $\mathrm{Im}(f)$. Or, f est surjective si et seulement si $\mathrm{Im}(f) = F$ donc si et seulement si $(f(e_1), f(e_2), ..., f(e_n))$ est une famille génératrice de F.
3. f est un isomorphisme si et seulement si f est injective et surjective donc, par les deux points précédents, si et seulement si $(f(e_1), f(e_2), ..., f(e_n))$ est une famille libre et génératrice de F. Ainsi, on conclut que f est un isomorphisme si et seulement si $(f(e_1), f(e_2), ..., f(e_n))$ est une base de F.

□

Corollaire 29

Soit E et F deux K-espaces vectoriels de dimensions finies et $f \in \mathscr{L}(E, F)$.

1. Si f est injective alors $\dim(E) \leqslant \dim(F)$.
2. Si f est surjective alors $\dim(E) \geqslant \dim(F)$.
3. Si f est bijective alors $\dim(E) = \dim(F)$.

Démonstration.

1. Supposons que f est injective. Alors, $(f(e_1), f(e_2), ..., f(e_n))$ est une famille libre de F donc, d'après la Propriété 55 du chapitre 2, $n \leqslant \dim(F)$ i.e. $\dim(E) \leqslant \dim(F)$.
2. Supposons que f est surjective. Alors, $(f(e_1), f(e_2), ..., f(e_n))$ est une famille génératrice de F donc, d'après la Propriété 55 du chapitre 2, $n \geqslant \dim(F)$ i.e. $\dim(E) \geqslant \dim(F)$.
3. Supposons que f est bijective. Alors, d'après les deux points précédents, comme f est injective, $\dim(E) \leqslant \dim(F)$ et, comme f est surjective, $\dim(E) \geqslant \dim(F)$. Ainsi, $\dim(E) = \dim(F)$.

□

Exemple 30. Justifier, sans calcul, que l'application h de l'exemple 17 n'est pas surjective.

Solution. Comme h est une application de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ et $\dim(\mathbb{R}^2) < \dim(\mathbb{R}^3)$, h ne peut pas être injective.

2) Rang d'une application linéaire

Définition 31

Soit E et F deux K-espaces vectoriels de dimensions finies et $f \in \mathscr{L}(E, F)$. On appelle **rang** de f, et on note $\mathrm{rg}(f)$, la dimension de $\mathrm{Im}(f)$ c'est-à-dire

$$\mathrm{rg}(f) = \dim(\mathrm{Im}(f)).$$

Exemple 32. Déterminer le rang des applications f, g et h de l'exemple 17.

Solution.

1. On a vu que $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}_{n-1}[X]$ donc $\mathrm{rg}(f) = \dim(\mathbb{R}_{n-1}[X]) = n$.
2. On a vu que $\mathrm{Im}(g) = \mathbb{R}^3$ donc $\mathrm{rg}(g) = \dim(\mathbb{R}^3) = 3$.
3. On a vu que $\mathrm{Im}(h) = \mathbb{R}^2$ donc $\mathrm{rg}(h) = \dim(\mathbb{R}^2) = 2$.

Remarque 33. Par définition, $\mathrm{rg}(f) \leqslant \dim(F)$ et, d'après la propriété 25, $\mathrm{rg}(f) \leqslant \dim(E)$.

Théorème 34. — Théorème du rang (admis)

Soit E et F deux K-espaces vectoriels de dimensions finies et $f \in \mathscr{L}(E, F)$. Alors,

$$\dim(\ker(f)) + \mathrm{rg}(f) = \dim(E).$$

Exemple 35. On considère l'application

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}_3[X] \\ (a\,;b) & \longmapsto & aX^3 + (a+b)X^2 + (a-b)X + b \end{array}$$

1. Montrer que f est linéaire puis déterminer son noyau.
2. En déduire la dimension de $\mathrm{Im}(f)$ puis en déterminer une base.

Solution.

1. Soit $v_1 = (a_1, b_1)$ et $v_2 = (a_2, b_2)$ deux éléments de $\mathbb{R}^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors, $\lambda v_1 + v_2 = (\lambda a_1 + a_2, \lambda b_1 + b_2)$ donc

$$\begin{aligned} f(\lambda v_1 + v_2) &= (\lambda a_1 + a_2)X^3 + (\lambda a_1 + a_2 + \lambda b_1 + b_2)X^2 + (\lambda a_1 + a_2 - (\lambda b_1 + b_2))X + \lambda b_1 + b_2 \\ &= \lambda(a_1X^3 + (a_1 + b_1)X^2 + (a_1 - b_1)X + b_1) + a_2X^3 + (a_2 + b_2)X^2 + (a_2 - b_2)X + b_2 \\ &= \lambda f(v_1) + f(v_2) \end{aligned}$$

donc f est une application linéaire. De plus, pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$,

$$\begin{aligned} (a, b) \in \ker(f) &\iff aX^3 + (a+b)X^2 + (a-b)X + b = 0_{\mathbb{R}_3[X]} \\ &\iff \begin{cases} a = 0 \\ a + b = 0 \\ a - b = 0 \\ b = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

donc $\ker(f) = \{(0, 0)\}$.

2. Ainsi, $\dim(\ker(f)) = 0$ donc, par le théorème du rang, $\mathrm{rg}(f) = \dim(\mathbb{R}^2) - 0 = 2$ i.e. $\dim(\mathrm{Im}(f)) = 2$.
Or, par propriété, la famille $(f(1, 0), f(0, 1)) = (X^3 + X^2 + X, X^2 - X + 1)$ est une famille génératrice de $\mathrm{Im}(f)$. De plus, cette famille est composée de 2 vecteurs et $\dim(\mathrm{Im}(f)) = 2$ donc, par propriété, $(X^3 + X^2 + X, X^2 - X + 1)$ est une base de $\mathrm{Im}(f)$.

Théorème 36

Soit E et F deux K-espaces vectoriels de même dimension n et $f \in \mathscr{L}(E, F)$. Alors, les propositions suivantes sont équivalentes :

1. f est injective ;

2. f est surjective ;

3. f est bijective ;

4. $\mathrm{rg}(f) = n$.

Démonstration. Considérons une base $(e_1, e_2, ..., e_n)$ de E et notons $\mathcal{F} = (f(e_1), f(e_2), ..., f(e_n))$.

Supposons que f est injective. Alors, par la Propriété 28, $\mathcal{F}$ est une famille libre de n vecteurs de F et $\dim(F) = n$ donc $\mathcal{F}$ est une base de F. Par la Propriété 28, f est donc bijective. Réciproquement, si f est bijective alors f est injective donc on a montré que **1.** équivaut à **3.**.

Supposons que f est surjective. Alors, par la Propriété 28, $\mathcal{F}$ est une famille génératrice de n vecteurs de F et $\dim(F) = n$ donc $\mathcal{F}$ est une base de F. Par la Propriété 28, f est donc bijective. Réciproquement, si f est bijective alors f est surjective donc on a montré que **2.** équivaut à **3.**.

Supposons que $\mathrm{rg}(f) = n$. Alors, $\dim(\mathrm{Im}(f)) = n = \dim(F)$ donc, comme $\mathrm{Im}(f)$ est un sous-espace vectoriel de F, $\mathrm{Im}(f) = F$. Ainsi, f est surjective donc bijective d'après le point précédent. Réciproquement, si f est bijective alors f est surjective donc $\mathrm{Im}(f) = F$ donc $\dim(\mathrm{Im}(f)) = \dim(F) = n$ i.e. $\mathrm{rg}(f) = n$. On donc montré que **4.** équivaut à **3.**.

Ainsi, **1.**, **2.** et **4.** sont équivalentes à **3.** donc les 4 propriétés sont équivalentes. □

Remarque 37. Le théorème précédent est particulièrement utile pour montrer qu'un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie est un automorphisme (puisque dans ce cas $E = F$ donc $\dim(E) = \dim(F)$).

Exemple 38. Démontrer que

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x\,;y\,;z) & \longmapsto & (x+y\,;x+z\,;y+z) \end{array}$$

est un automorphisme de $\mathbb{R}^3$.

Solution. Soit $v_1 = (x_1, y_1, z_1)$ et $v_2 = (x_2, y_2, z_2)$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors, $\lambda v_1 + v_2 = (\lambda x_1 + x_2, \lambda y_1 + y_2, \lambda z_1 + z_2)$ donc

$$\begin{aligned} f(\lambda v_1 + v_2) &= (\lambda x_1 + x_2 + \lambda y_1 + y_2, \lambda x_1 + x_2 + \lambda z_1 + z_2, \lambda y_1 + y_2 + \lambda z_1 + z_2) \\ &= \lambda(x_1 + y_1, x_1 + z_1, y_1 + z_1) + (x_2 + y_2, x_2 + z_2, y_2 + z_2) \\ &= \lambda f(v_1) + f(v_2) \end{aligned}$$

donc f est une application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans lui-même : il s'agit donc d'un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$.

Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Alors,

$$(x,y,z) \in \ker(f) \iff \begin{cases} x + y \quad\;\; = 0 & L_1 \\ x \quad\;\; + z = 0 & L_2 \\ \quad\;\; y + z = 0 & L_3 \end{cases} \iff \begin{cases} x + y \quad\;\; = 0 & L_1 \\ \;\; -y + z = 0 & L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ \quad\;\; y + z = 0 & L_3 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x + y \quad\;\; = 0 & L_1 \\ \;\; -y + z = 0 & L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ \qquad 2z = 0 & L_3 \leftarrow L_3 + L_2 \end{cases}$$

On obtient un système échelonné homogène avec 3 pivots : il s'agit donc d'un système de Cramer homogène dont l'unique solution est $(0,0,0)$. Ainsi, $\ker(f) = \{(0,0,0)\}$ donc f est injective et, comme f est un endomorphisme, on en déduit que f est bijective. Ainsi, f est une automorphisme de $\mathbb{R}^3$.