⧫ Chapitre 6. Applications linéaires

Dans tout le chapitre, K désigne l'ensemble $\mathbb{R}$ ou l'ensemble $\mathbb{C}$.

I. — Définitions et propriétés générales

1) Définition

Définition 1

Soit E et F deux K-espaces vectoriels. Une **application linéaire** de E dans F est une fonction $f : E \longrightarrow F$ compatible avec les opérations d'espaces vectoriels c'est-à-dire telle que :

- $\forall (u\,;v) \in E^2 \; f(u+v) = f(u) + f(v)\,;$
- $\forall v \in E \; \forall \lambda \in K \; f(\lambda v) = \lambda f(v)$.

L'ensemble des applications linéaires de E dans F se note $\mathscr{L}(E, F)$.

⚠ On prendra garde au fait que dans l'égalité $f(u+v) = f(u) + f(v)$, le « + » à gauche représente l'addition dans E alors que le « + » à droite représente l'addition dans F.

Remarque 2. Dans la pratique, on peut montrer qu'une application est linéaire en montrant que, pour tout $(u\,;v) \in E^2$ et tout $\lambda \in K$, $f(\lambda u + v) = \lambda f(u) + f(v)$.

Exemple 3.

1. Pour tout réel a, $f_1 : x \longmapsto ax$ est une application linéaire de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
2. $f_2 : P \longmapsto P'$ est une application linéaire de $\mathbb{R}[X]$ dans $\mathbb{R}[X]$.
3. $f_3 : A \longmapsto {}^tA$ est une application linéaire de $\mathscr{M}_n(K)$ dans $\mathscr{M}_n(K)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
4. $f_4 : g \longmapsto \displaystyle\int_0^1 g(t)\,\mathrm{d}t$ est une application linéaire du $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions continues sur $[0\,;1]$ dans $\mathbb{R}$.
5. $f_5 : (x\,;y\,;z) \longmapsto (x-y+z\,;2x-3y-z)$ est une application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$.
6. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $k \in [\![1, n]\!]$, $p_k : (x_1, x_2, ..., x_n) \longmapsto x_k$ est une application linéaire de K^n dans K appelée la k-ième projection.
7. Si E est un espace vectoriel alors $\mathrm{id}_E : v \longmapsto v$ est une application linéaire de E dans lui-même.
8. Si E est un espace vectoriel alors l'application nulle $v \longmapsto 0_E$ est une application linéaire de E dans lui-même.
9. Si Ω est un univers fini, l'espérance est une application linéaire du $\mathbb{R}$-espace vectoriel des variables aléatoires réelles sur Ω dans $\mathbb{R}$.
10. $f : x \longmapsto x^2$ n'est pas une application linéaire de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
11. $\det : A \longmapsto \det(A)$ n'est pas une application linéaire de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$.

Propriété 4

Soit E et F deux K-espaces vectoriels et $f \in \mathscr{L}(E, F)$.

1. $f(0_E) = 0_F$.
2. Pour tout $v \in E$, $f(-v) = -f(v)$.
3. L'image d'une combinaison de vecteurs de E est la combinaison linéaire des images avec les mêmes coefficients. Autrement dit,

$$\forall (v_1, v_2, ..., v_p) \in E^p \ \forall (\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_p) \in K^p \ f\left(\sum_{k=1}^{p} \lambda_k v_k\right) = \sum_{k=1}^{p} \lambda_k f(v_k).$$

Définition 5

Soit E et F deux K-espaces vectoriels.

1. Un **endomorphisme** de E est une application linéaire de E dans lui-même. On note $\mathscr{L}(E)$ l'ensemble des endomorphismes de E.
2. Un **isomorphisme** de E dans F est une application linéaire bijective de E dans F.
3. Un **automorphisme** de E est une application linéaire bijective de E dans lui-même c'est-à-dire une application qui est à la fois un endomorphisme de E et un isomorphisme. On note $\mathrm{Aut}(E)$ l'ensemble des automorphismes de E.

Exemple 6.

1. Montrer que $f : (x\,;y\,;z) \longmapsto (x+y+z\,;x-y+z\,;x+z)$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ qui n'est pas un isomorphisme.
2. Montrer que $g : (a\,;b\,;c) \longmapsto aX^2 + bX + c$ est un isomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}_2[X]$.
3. Montrer que $h : (x\,;y) \longmapsto (x+y\,;x-y)$ est un automorphisme de $\mathbb{R}^2$.

2) Opérations

Propriété 7. — Combinaisons linéaires

Soit E et F deux K-espaces vectoriels, $f \in \mathscr{L}(E, F)$ et $g \in \mathscr{L}(E, F)$.
Pour tous réels α et β, $\alpha f + \beta g \in \mathscr{L}(E, F)$.

Remarque 8. On déduit de la propriété précédente que $\mathscr{L}(E, F)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{F}(E, F)$.

Propriété 9. — Composition

Soit E, F et G des K-espaces vectoriels, $f \in \mathscr{L}(E, F)$ et $g \in \mathscr{L}(F, G)$.
Alors, $g \circ f \in \mathscr{L}(E, G)$.

Exemple 10. En reprenant les applications de l'exemple 6, déterminer l'application $g \circ f$.

Propriété 11. — Réciproque

Soit E et F deux K-espaces vectoriels. Si f est un isomorphisme de E dans F alors f^{-1} est un isomorphisme F dans E.

Exemple 12. En reprenant les applications de l'exemple 6, déterminer les applications g^{-1} et h^{-1}.

3) Noyau et image d'une application linéaire

a) Noyau et lien avec l'injectivité

Définition 13

Soit E et F deux K-espaces vectoriels et $f \in \mathscr{L}(E, F)$. L'ensemble

$$\{u \in E \mid f(u) = 0_F\}$$

est appelé le **noyau** de f et se note $\ker(f)$ (ou $\ker f$).

Remarque 14.

1. Le noyau d'une application linéaire $f : E \longrightarrow F$ est donc l'ensemble des antécédents de 0_F par f.
2. Étant donné que si $f \in \mathscr{L}(E, F)$, $f(0_E) = 0_F$, 0_E est toujours un élément de $\ker(f)$ et en particulier $\ker(f)$ n'est jamais vide.

Propriété 15

Soit E et F deux K-espaces vectoriels et $f \in \mathscr{L}(E, F)$. Alors, $\ker(f)$ est un sous-espace vectoriel de E.

Propriété 16

Soit E et F deux K-espaces vectoriels et $f \in \mathscr{L}(E, F)$. Alors, f est injective si et seulement si $\ker(f) = \{0_E\}$.

Exemple 17.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer le noyau de l'endomorphisme f de $\mathbb{R}_n[X]$ défini par $f : P \longmapsto P'$. Que peut-on en déduire ?
2. Déterminer le noyau de l'endomorphisme g de $\mathbb{R}^3$ défini par

$$g : (x\,; y\,; z) \longmapsto (x + y + z\,; x - y + z\,; x + y - z)\,.$$

   Que peut-on en déduire ?
3. Déterminer la noyau de l'aplication linéaire $h : (x\,; y\,; z) \longmapsto (x + 2y\,; 2x - y)$ de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$. Que peut-on en déduire ?

b) Image et lien avec la surjectivité

Définition 18

Soit E et F deux K-espaces vectoriels et $f \in \mathscr{L}(E, F)$. L'image directe de E par f, c'est-à-dire

$$\{f(u) \mid u \in E\} = \{v \in F \mid \exists u \in E \; v = f(u)\}$$

est appelée l'**image** de f et se note $\mathrm{Im}(f)$ (ou $\mathrm{Im}\, f$).

Remarque 19. Étant donné que si $f \in \mathscr{L}(E, F)$, $f(0_E) = 0_F$, 0_F est toujours un élément de $\mathrm{Im}(f)$ et en particulier $\mathrm{Im}(f)$ n'est jamais vide.

Propriété 20

Soit E et F deux K-espaces vectoriels et $f \in \mathscr{L}(E, F)$. Alors, $\mathrm{Im}(f)$ est un sous-espace vectoriel de F.

Propriété 21

Soit E et F deux K-espaces vectoriels et $f \in \mathscr{L}(E, F)$. Alors, f est surjective si et seulement si $\mathrm{Im}(f) = F$.

Exemple 22. Déterminer les images des applications linéaires de l'exemple 17. Que peut-on en déduire dans chaque cas ?

II. — Applications linéaires en dimension finie

1) Image d'une base par une application linéaire

Théorème 23

Soit E et F deux K-espaces vectoriels de dimensions finies. Alors, une application linéaire $f : E \longrightarrow F$ est entièrement déterminée par l'image d'une base de E.

Remarque 24. Une autre façon d'énoncer le théorème précédent est la suivante : si $(e_1, e_2, ..., e_n)$ est une base de E et si f et g sont deux éléments de $\mathscr{L}(E, F)$ alors $f = g$ si et seulement si, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $f(e_i) = g(e_i)$.

Propriété 25

Soit E et F deux K-espaces vectoriels de dimensions finies et $f \in \mathscr{L}(E, F)$. Si $(e_1, e_2, ..., e_n)$ est une base de E alors $(f(e_1), f(e_2), ..., f(e_n))$ est une famille génératrice de $\mathrm{Im}(f)$.
En particulier, $\dim(\mathrm{Im}(f)) \leqslant \dim(E)$.

Remarque 26. En général, $(f(e_1), f(e_2), ..., f(e_n))$ n'est pas libre et n'est donc pas une base de $\mathrm{Im}(f)$.

Exemple 27. Déterminer une famille génératrice de l'image des applications linéaires de l'exemple 17. Dans chaque cas, déterminer s'il s'agit d'une base.

Propriété 28

Soit E et F deux K-espaces vectoriels de dimensions finies et $f \in \mathscr{L}(E, F)$. On suppose que $(e_1, e_2, ..., e_n)$ est une base de E.

1. La famille $(f(e_1), f(e_2), ..., f(e_n))$ est libre si et seulement si f est injective.

2. La famille $(f(e_1), f(e_2), ..., f(e_n))$ est génératrice de F si et seulement si f est surjective.

3. f est un isomorphisme si et seulement si $(f(e_1), f(e_2), ..., f(e_n))$ est une base de F.

Corollaire 29

Soit E et F deux K-espaces vectoriels de dimensions finies et $f \in \mathscr{L}(E, F)$.

1. Si f est injective alors $\dim(E) \leqslant \dim(F)$.

2. Si f est surjective alors $\dim(E) \geqslant \dim(F)$.

3. Si f est bijective alors $\dim(E) = \dim(F)$.

Exemple 30. Justifier, sans calcul, que l'application f de l'exemple 17 n'est pas injective et que l'application h de l'exemple 17 n'est pas surjective.

2) Rang d'une application linéaire

Définition 31

Soit E et F deux K-espaces vectoriels de dimensions finies et $f \in \mathscr{L}(E, F)$. On appelle **rang** de f, et on note $\mathrm{rg}(f)$, la dimension de $\mathrm{Im}(f)$ c'est-à-dire

$$\mathrm{rg}(f) = \dim(\mathrm{Im}(f)).$$

Exemple 32. Déterminer le rang des applications f, g et h de l'exemple 17.

Remarque 33. Par définition, $\mathrm{rg}(f) \leqslant \dim(F)$ et, d'après la propriété 25, $\mathrm{rg}(f) \leqslant \dim(E)$.

Théorème 34. — Théorème du rang (admis)

Soit E et F deux K-espaces vectoriels de dimensions finies et $f \in \mathscr{L}(E, F)$. Alors,

$$\dim(\ker(f)) + \mathrm{rg}(f) = \dim(E).$$

Exemple 35. On considère l'application

$$\begin{array}{cccc} f: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}_3[X] \\ & (a\,;b) & \longmapsto & aX^3 + (a+b)X^2 + (a-b)X + b \end{array}$$

1. Montrer que f est linéaire puis déterminer son noyau.

2. En déduire la dimension de $\mathrm{Im}(f)$ puis en déterminer une base.

Théorème 36

Soit E et F deux K-espaces vectoriels de même dimension n et $f \in \mathscr{L}(E, F)$. Alors, les propositions suivantes sont équivalentes :

1. f est injective ;

2. f est surjective ;

3. f est bijective ;

4. $\mathrm{rg}(f) = n$.

Remarque 37. Le théorème précédent est particulièrement utile pour montrer qu'un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie est un automorphisme (puisque dans ce cas $E = F$ donc $\dim(E) = \dim(F)$).

Exemple 38. Démontrer que

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x\,;y\,;z) & \longmapsto & (x+y\,;x+z\,;y+z) \end{array}$$

est un automorphisme de $\mathbb{R}^3$.

III. — Exercices

Exercice 1. Démontrer que les applications suivantes sont linéaires.

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x\,;y\,;z) & \longmapsto & x+2y-z \end{array} \qquad g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x\,;y) & \longmapsto & (x+y\,;2x-y) \end{array}$$

Exercice 2. On considère l'application $f : (x\,;y) \longmapsto xy$ de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$.

1. Calculer$f((1\,;1))$ et $f((2\,;2))$.

2. L'application f est-elle linéaire ?

Exercice 3. Les applications suivantes sont-elles linéaires ?

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x+1 \end{array} \qquad g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}[X] \\ P & \longmapsto & P'-P \end{array}$$

$$h : \begin{array}{ccc} \mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \varphi & \longmapsto & \varphi(0) \end{array} \qquad k : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}[X] \\ P & \longmapsto & P'-P^2 \end{array}$$

Exercice 4. Montrer que l'application $f : (x\,;y\,;z) \longmapsto (x+2y\,;4x-y+z\,;2x+2y+3z)$ est un automorphisme de $\mathbb{R}^3$ et déterminer f^{-1}.

Exercice 5. Déterminer une base du noyau de chacune des applications linéaires suivantes.

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x\,;y\,;z) & \longmapsto & (x+y+z\,;x+2y-z) \end{array} \qquad g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathscr{M}_3(\mathbb{R}) \\ (x\,;y\,;z) & \longmapsto & \begin{pmatrix} x-y & y-z & z-x \\ y-z & z-x & x-y \\ z-x & x-y & y-z \end{pmatrix} \end{array}$$

$$h : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x\,;y\,;z) & \longmapsto & (x+y+z\,;x-z\,;2x+y) \end{array} \qquad k : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}[X] \\ P & \longmapsto & P-XP'-P(0) \end{array}$$

Exercice 6.

1. Montrer que $f : (x\,;y\,;z) \longmapsto x - 2y + 3z$ est une application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$.
2. Montrer que $H = \{(x\,;y\,;z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - 2y + 3z = 0\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
3. Déterminer une base de H.

Exercice 7. Déterminer une base de l'espace image de chacune des applications linéaires suivantes, puis en déduire son rang.

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x\,;y) & \longmapsto & (x+y\,;2x+2y) \end{array} \qquad g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x\,;y) & \longmapsto & (x+y\,;x+2y\,;y) \end{array}$$

Exercice 8. Dans le plan $\mathbb{R}^2$, on considère la droite vectorielle D d'équation $y = 2x$.

1. Déterminer une base (e_1) de D.
2. On pose $e_2 = (-2\,;1)$. Démontrer que la famille $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ est une base de $\mathbb{R}^2$.
3. Représenter géométriquement D, e_1 et e_2.
4. Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ la symétrie d'axe D. On admet que f est linéaire.
   a. Déterminer graphiquement $f(e_1)$ et $f(e_2)$.
   b. On considère la vecteur $u = (3\,;4)$.
   Calculer les coordonnées de u dans la base $\mathcal{B}$.
   c. En déduire le symétrique de u par rapport à D.
5. Soit g l'application linéaire définie par $g = \dfrac{1}{2}(f + \mathrm{id}_{\mathbb{R}^2})$.
   a. Soit un vecteur $v = \alpha e_1 + \beta e_2$ où $(\alpha\,;\beta) \in \mathbb{R}^2$. Vérifier par le calcul que $g(v)$ appartient à la droite D.
   b. Déterminer le noyau de g et interpréter géométriquement.

Exercice 9.

1. Justifier qu'il existe une unique application linéaire f de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ telle que $f((1\,;0\,;0))) = (0\,;1)$, $f((1\,;1\,;0)) = (1\,;0)$ et $f((1\,;1\,;1)) = (1\,;1)$.
2. Déterminer explicitement f.
3. Déterminer le noyau et l'image de f.

Exercice 10. Déterminer une base du noyau et de l'image des applications linéaires suivantes.

1. $f : (x\,;y\,;z) \longmapsto (y - z\,;z - x\,;x - y)$ de $\mathbb{R}^3$ dans lui-même.
2. $g : (x, y, z, t) \longmapsto (2x + y + z\,;x + y + t\,;x + z - t)$ de $\mathbb{R}^4$ dans $\mathbb{R}^3$.

Exercice 11. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $f : P \longmapsto P + P'$ est un automorphisme $\mathbb{R}_n[X]$.

Exercice 12. Soit t_1, t_2 et t_3 trois réels distincts.

1. Montrer que $f : P \longmapsto (P(t_1)\,;P(t_2)\,;P(t_3))$ est un isomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$ dans $\mathbb{R}^3$.
2. Soit s_1, s_2 et s_3 des réels. Déduire de la question précédente qu'il existe un unique polynôme $P \in \mathbb{R}_2[X]$ tel que $P(t_1) = s_1$, $P(t_2) = s_2$ et $P(t_3) = s_3$.

Exercice 13.

1. Montrer que $f : A \longmapsto A + {}^tA$ est un endomorphisme de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
2. Déterminer une base de $\ker(f)$ et en déduire la dimension de $\mathrm{Im}(f)$.

Exercice 14.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
   a. Montrer que $f_n : P \longmapsto P(X+1) - P(X)$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
   b. Déterminer $\ker(f_n)$ et en déduire que $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}_{n-1}[X]$.
2. Montrer que l'application $g : P \longmapsto P(X+1) - P(X)$ est un endomorphisme surjectif de $\mathbb{R}[X]$.