⧫ Chapitre 5. Étude locale d'une fonction

I. — Rappels et compléments sur la dérivation

Dans tout ce paragraphe, f est une fonction numérique, $a \in \mathcal{D}_f$ et on suppose qu'il existe un intervalle I non réduit à un point tel que $a \in I \subset \mathcal{D}_f$.

1) Nombre dérivé

Définition 1

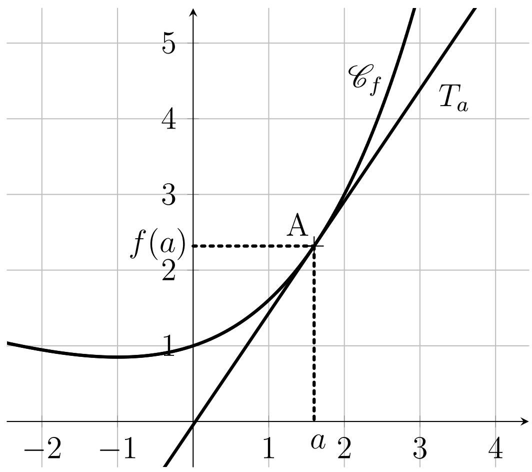
On dit que f est **dérivable en** a si le taux de variation $t(h) = \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$ admet une limite finie quand h tend vers 0. Cette limite est alors appelée le nombre dérivé de f en a et se note $f'(a)$ ou $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(a)$.

Remarque 2. Si f est dérivable en a alors, par définition, $f'(a) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$ ce qui peux aussi s'écrire, en posant $x = a + h$, $f'(a) = \lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$. Ceci peut parfois servir pour calculer des limites.

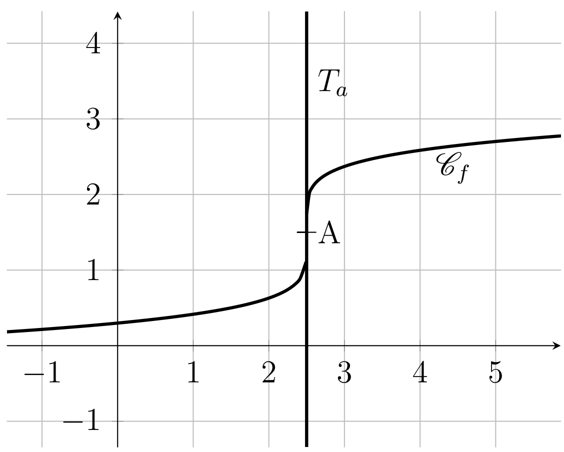
Définition 3

On suppose que a n'est pas une borne de $\mathcal{D}_f$ et on note A le point de coordonnées $(a\,;f(a))$

1. Si f est dérivable en a, on appelle tangente à $\mathscr{C}_f$ au point A la droite passant par A et dont le coefficient directeur est $f'(a)$.
2. Si f n'est pas dérivable en a mais si son taux de variation en a diverge vers $+\infty$ ou vers $-\infty$ lorsque h tend 0, on dit que $\mathscr{C}_f$ possède une tangente verticale en A.



Tangente dans le cas où f est dérivable en a



Tangente verticale en A

Remarque 4. Si a est une borne de $\mathcal{D}_f$, on peut prolonger la définition précédente mais on parle plutôt, dans ce cas, de demi-tangente.

Propriété 5

Si a n'est pas une borne de $\mathcal{D}_f$ et si f est dérivable en a alors la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse a a pour équation réduite

$$y = f'(a)(x-a) + f(a).$$

Démonstration. Comme f est dérivable en a, la tangente T à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse a est la droite ayant pour coefficient directeur $f'(a)$ et passant par le point $\mathrm{A}(a, f(a))$. Ainsi, T a une équation réduite de la forme $y = f'(a)x + p$ et, comme $\mathrm{A} \in T$, $f(a) = f'(a)a + p$ donc $p = f(a) - f'(a)a$.

Dès lors, l'équation réduire de T est $y = f'(a)x + f(a) - f'(a)a$ soit $y = f'(a)(x-a) + f(a)$. □

2) Fonction dérivée

a) Définition

Définition 6

1. Si f est dérivable en tout point $a \in \mathcal{D}_f$, on dit que f est dérivable sur $\mathcal{D}_f$.
2. Si f est dérivable sur $\mathcal{D}_f$, on définit la fonction dérivée (ou simplement la dérivée) de f comme la fonction qui à tout $a \in \mathcal{D}_f$ associe le nombre $f'(a)$. On note cette fonction f' ou $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$.

b) Dérivées des fonctions usuelles

On désigne par c, a, b et α des constantes réelles et par n un entier naturel non nul.

La dérivée de	est	sur
$x \longmapsto c$	$x \longmapsto 0$	$\mathbb{R}$
$x \longmapsto ax+b$	$x \longmapsto a$	$\mathbb{R}$
$x \longmapsto x^n$	$x \longmapsto nx^{n-1}$	$\mathbb{R}$
$x \longmapsto \dfrac{1}{x^n}$	$x \longmapsto -\dfrac{n}{x^{n+1}}$	$]-\infty\,;0[\cup]0\,;+\infty[$
$x \longmapsto \sqrt{x}$	$x \longmapsto \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0\,;+\infty[$
$x \longmapsto x^\alpha$	$x \longmapsto \alpha x^{\alpha-1}$	$]0\,;+\infty[$
exp	exp	$\mathbb{R}$
ln	$x \longmapsto \dfrac{1}{x}$	$]0\,;+\infty[$

La dérivée de	est	sur
$\sin$	$\cos$	$\mathbb{R}$
$\cos$	$-\sin$	$\mathbb{R}$
$\tan$	$x \longmapsto \dfrac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x)$	$\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$
$\arctan$	$x \longmapsto \dfrac{1}{1+x^2}$	$\mathbb{R}$

3) Dérivée et opérations algébriques

Si u et v sont deux fonctions dérivables sur un même ensemble E et si k est un réel alors les fonctions $u+v$, ku, uv, $\dfrac{1}{v}$ et $\dfrac{u}{v}$ sont dérivables sur leurs ensembles de définition respectifs et

$(u+v)' = u' + v'$	$(ku)' = ku'$	$(uv)' = u'v + uv'$	$\left(\dfrac{1}{v}\right)' = -\dfrac{v'}{v^2}$	$\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$

4) Dérivée d'une fonction composée

Théorème 7

Soit v une fonction définie sur un intervalle J et u une fonction définie sur un intervalle I telle que, pour tout $x \in I$, $u(x) \in J$. Si u est dérivable sur I et si v est dérivable sur J alors la composée $v \circ u$ est dérivable sur I et $(v \circ u)' = u' \times (v' \circ u)$.

Remarque 8. En particulier, si u est une fonction dérivable sur un ensemble E et si $n \in \mathbb{N}$ alors

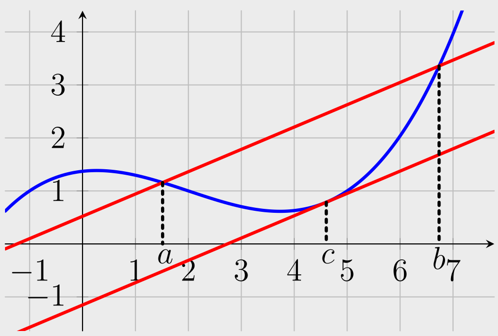
- la fonction e^u est dérivable sur E et $(\mathrm{e}^u)' = u'\mathrm{e}^u$
- la fonction u^n est dérivable sur E et $(u^n)' = nu'u^{n-1}$.
- si u ne s'annule pas sur E alors la fonction $\frac{1}{u^n}$ est dérivable sur E et $\left(\frac{1}{u^n}\right)' = -\frac{nu'}{u^{n+1}}$.
- si u est strictement positive sur E alors $\ln(u)$ est dérivable sur E et $(\ln(u))' = \frac{u'}{u}$.

5) Théorème des accroissements finis

Théorème 9. (admis)

Soit I un intervalle et f une fonction dérivable sur I. Alors, pour tous éléments a et b de I tels que $a < b$, il existe $c \in]a\,;b[$ tel que

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c).$$



6) Liens entre dérivée et variations

Théorème 10. (admis)

Soit f une fonction définie et dérivable sur un <u>intervalle</u> I.

1. Si, pour tout $x \in I$, $f'(x) \geqslant 0$ et si $f'(x)$ ne s'annule qu'un nombre fini de fois sur I alors f est strictement croissante sur I.
2. Si, pour tout $x \in I$, $f'(x) \leqslant 0$ et si $f'(x)$ ne s'annule qu'un nombre fini de fois sur I alors f est strictement décroissante sur I.
3. Si, pour tout $x \in I$, $f'(x) = 0$ alors f est constante sur I.

7) Dérivées successives

Dans tout ce qui suit, I désigne un intervalle non réduit à un point.

Définition 11

Si f est dérivable sur I et si f' est elle-même dérivable sur I, on dit que f est deux fois dérivable sur I et la dérivée de f' est appelée la dérivée seconde de f. On la note f'' (lire « f seconde »).

Exemple 12. Déterminer les dérivées secondes des fonctions sin, cos et exp.

Solution.

• La fonction sin est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\sin' = \cos$. Comme la fonction cos est elle-même dérivable sur $\mathbb{R}$, la fonction sin est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ est $\sin'' = \cos' = -\sin$.

• La fonction cos est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\cos' = -\sin$. Comme la fonction sin est elle-même dérivable sur $\mathbb{R}$, la fonction cos est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ est $\cos'' = (-\sin)' = -\cos$.

• La fonction exp est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\exp' = \exp$ donc exp est deux fois dérivable et $\exp'' = \exp$.

Définition 13

De façon plus générale, on peut définir, si elles existent, les dérivées successives de f de la manière suivante :

- $f^{(0)} = f$;
- pour tout $n \in \mathbb{N}$, si $f^{(n)}$ existe et est dérivable sur I, on pose $f^{(n+1)} = (f^{(n)})'$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, si elle existe, $f^{(n)}$ s'appelle la dérivée n-ième de f sur I.

Remarque 14.

1. En particulier, si elles existent, $f^{(1)} = f'$ est la dérivée de f et $f^{(2)} = f''$ est la dérivée seconde de f.
2. Si f est une fonction de la variable x et si f admet une dérivée n-ième alors $f^{(n)}$ peut aussi se noter $\dfrac{\mathrm{d}^n f}{\mathrm{d}x^n}$. Ainsi, en mécanique, si x est la position d'un mobile en fonction du temps, $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$ correspond à la vitesse et $\dfrac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}$ à l'accélération.

Exemple 15. Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la dérivée n-ième des fonctions suivantes sur $\mathbb{R}$:

1. exp **2.** $f : x \longmapsto \mathrm{e}^{2x}$ **3.** $g : x \longmapsto x^k$ $(k \in \mathbb{N})$ **4.** cos

Solution. Soit $n \in \mathbb{N}$.

1. Comme exp est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\exp' = \exp$, *exp* est n fois dérivable et $\exp^{(n)} = \exp$.
2. Montrons par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la proposition $\mathcal{P}(n)$: « $f^{(n)} = 2^n f$ ».
   - **Initialisation.** Par définition, $f^{(0)} = f$ et $2^0 f = f$ donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
   - **Hérédité.** Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $\mathcal{P}(n)$ est vraie. Alors, $f^{(n)} = 2^n f$. Or, f est la composée de la fonction affine $x \longmapsto 2x$ et de la fonction exp, toutes deux dérivables sur $\mathbb{R}$ donc f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout réel x, $f'(x) = 2\mathrm{e}^{2x} = 2f(x)$. Dès lors, $f^{(n)}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f^{(n+1)}(x) = (f^{(n)})' = (2^n f)' = 2^n f' = 2^n(2f) = 2^{n+1} f$. Ainsi, $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
   - **Conclusion.** Par le principe de récurrence, $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, f est n fois dérivable et $f^{(n)} = 2^n f$.
3. La fonction g est un polynôme donc sa dérivée est n fois dérivable. De plus, pour tout entier $n > k$, $g^{(n)} = 0$ et, pour tout $k \in [\![0, n]\!]$ et, pour tout réel x,
$$g^{(n)}(x) = k(k-1)\cdots(k-n+1)x^{k-n} = \frac{k!}{(k-n)!}x^{k-n}.$$
4. On a vu que $\cos' = -\sin$ et $\cos'' = -\cos$. On en déduit que cos est 3 fois dérivable et $\cos^{(3)} = \sin$ et cos est 4 fois dérivable $\cos^{(4)} = \cos$. On en déduit que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, cos est n fois dérivable et que ses dérivées successives sont périodiques. Ainsi, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\cos^{(4k)} = \cos$, $\cos^{(4k+1)} = -\sin$, $\cos^{(4k+2)} = -\cos$ et $\cos^{(4k+3)} = \sin$.

Définition 16

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. On dit que f est de classe $\mathscr{C}^n$ sur I si f admet une dérivée n-ième sur I et si $f^{(n)}$ est continue sur I.
2. On dit que f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur I si f admet une dérivée n-ième sur I pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Remarque 17.

1. Dire que f est de classe $\mathscr{C}^0$ sur I signifie que f est continue sur I et dire que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I signifie que f est dérivable sr I et que f' est continue sur I.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Si f est de classe $\mathscr{C}^n$ sur I alors elle est de classe $\mathscr{C}^k$ sur I pour tout $k \in [\![0, n]\!]$.
3. f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur I si et seulement si elle est de classe $\mathscr{C}^n$ sur I pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Propriété 18. (admise)

1. Toutes les fonctions de référence sont de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur tout intervalle inclus dans leurs ensembles de dérivabilité.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$. L'ensemble des fonctions de classe $\mathscr{C}^n$ sur I est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{F}(I, \mathbb{R})$ et pour toutes fonctions f et g de classe $\mathscr{C}^n$ sur I et tous réels λ et μ, $(\lambda f + \mu g)^{(n)} = \lambda f^{(n)} + \mu g^{(n)}$.
3. Soit $n \in \mathbb{N}$. Si f et g sont deux fonctions de classe $\mathscr{C}^n$ sur I alors fg est de classe $\mathscr{C}^n$ sur I et, si g ne s'annule pas sur I, $\frac{f}{g}$ est de classe $\mathscr{C}^n$ sur I.
4. Soit $n \in \mathbb{N}$. Si f est une fonction de classe $\mathscr{C}^n$ sur I, si g est une fonction de classe $\mathscr{C}^n$ sur un intervalle J tel que, pour tout $x \in I$, $f(x) \in J$ alors $g \circ f$ est de classe $\mathscr{C}^n$ sur I.

II. — Équivalence de fonctions

Dans toute la suite, a désigne un réel ou $-\infty$ ou $+\infty$ et on dit qu'une fonction f est définie au voisinage de a s'il existe un réel $b \neq a$ tel que $]a\,;b[$ ou $]b\,;a[$ soit inclus dans $\mathcal{D}_f$.

Définition 19

Soit f et g deux fonctions définies au voisinage de a et qui ne s'annulent pas au voisinage de a (sauf, éventuellement, en a). On dit que f est équivalente à g au voisinage de a si

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1.$$

Dans ce cas, on note $f(x) \underset{x \to a}{\sim} g(x)$ ou $f \underset{a}{\sim} g$.

Exemple 20. On considère les fonctions $f : x \longmapsto x^3 + x$ et $g : x \longmapsto x^3 + x^2 + 1$.

1. Les fonctions f et g sont-elles équivalentes au voisinage de $+\infty$?
2. Les fonctions f et g sont-elles équivalentes au voisinage de 0 ?

Solution.

1. Pour tout réel $x > 0$,

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x^3 + x}{x^3 + x^2 + 1} = \frac{x^3(1 + \frac{1}{x})}{x^3(1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^3})} = \frac{1 + \frac{1}{x}}{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^3}} \xrightarrow[x \to +\infty]{} 1$$

donc $f(x) \underset{x \to +\infty}{\sim} g(x)$.

2. Comme $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$ et $\lim\limits_{x \to 0} g(x) = 1$, $\dfrac{f(x)}{g(x)} \xrightarrow[x \to 0]{} 0 \neq 0$ donc f et g ne sont pas équivalents au voisinage de 0.

⚠ Une fonction n'est jamais équivalente à la fonction nulle.

Propriété 21

1. Aux voisinages de $+\infty$ et de $-\infty$, un polynôme non nul est équivalent à son monôme de plus haut degré.
2. Au voisinage de 0, un polynôme non nul est équivalent à son monôme de plus bas degré.
3. Une fonction f converge vers un réel ℓ <u>non nul</u> en a si et seulement si $f(x) \underset{x\to a}{\sim} \ell$.

Démonstration.

1. Soit P un polynôme non nul. Alors, il existe un entier n et des réels a_0, a_1, ..., a_n tels que $a_n \neq 0$ et, pour tout réel x, $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$. Alors, pour tout réel $x \neq 0$,
$$\frac{P(x)}{a_n x^n} = \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0}{a_n x^n} = 1 + \frac{a_{n-1}}{a_n x} + \cdots + \frac{a_1}{a_n x^{n-1}} + \frac{a_0}{x^n} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 1$$
donc $P(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} a_n x^n$.
2. Soit P un polynôme non nul. Alors, il existe un entier n et des réels a_0, a_1, ..., a_n tels que $a_n \neq 0$ et, pour tout réel x, $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_k x^k$. Alors, pour tout réel $x \neq 0$,
$$\frac{P(x)}{a_0} = \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_k x^k}{a_k x^k} = \frac{a_n}{a_k}x^{n-k} + \frac{a_{n-1}}{a_k}x^{n-k-1} + \cdots + \frac{a_{k+1}}{a_k}x + 1 \xrightarrow[x\to 0]{} 1$$
donc $P(x) \underset{x\to 0}{\sim} a_n x^n$.
3. Soit ℓ un réel non nul. Alors, $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} \ell$ si et seulement si $\dfrac{f(x)}{\ell} \xrightarrow[x\to a]{} 1$ ce qui équivaut à $f(x) \underset{x\to a}{\sim} \ell$.

□

Exemple 22. Si $f : x \longmapsto 5x^3 - 3x^2 + 7x - 2$ alors $f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} 5x^3$, $f(x) \underset{x\to-\infty}{\sim} 5x^3$ et $f(x) \underset{x\to 0}{\sim} -2$. Comme $f(x) \underset{x\to 0}{\sim} -2$, $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = -2$.

Propriété 23. Équivalents usuels au voisinage de 0

$$\mathrm{e}^x - 1 \underset{x\to 0}{\sim} x \qquad \ln(1+x) \underset{x\to 0}{\sim} x \qquad \sin(x) \underset{x\to 0}{\sim} x$$
$$1 - \cos(x) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{x^2}{2} \qquad \forall \alpha \in \mathbb{R}^*,\ (1+x)^\alpha - 1 \underset{x\to 0}{\sim} \alpha x.$$

Démonstration.

- Comme la fonction exp est dérivable en 0,
$$\lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{e}^x - 1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^0}{x - 0} = \exp'(0) = 1$$

donc $\mathrm{e}^x - 1 \underset{x\to 0}{\sim} x$.

- Comme la fonction $f : x \longmapsto \ln(1+x)$ est dérivable en 0,
$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = f'(0) = \frac{1}{1+0} = 1$$

donc $\ln(1+x) \underset{x\to 0}{\sim} x$.

- Comme la fonction sin est dérivable en 0,

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)-\sin(0)}{x-0} = \sin'(0) = \cos(0) = 1$$

donc $\sin(x) \underset{x\to 0}{\sim} x$.

Pour tout réel t, $\cos(2t) = 1 - 2\sin^2(t)$ $1 - \cos(2t) = 2\sin^2(t)$. En appliquant ceci à $t = \frac{x}{2}$, on en déduit que, pour tout réel x, $1 - \cos(x) = 2\sin^2(\frac{x}{2})$ donc, pour tout réel $x \neq 0$,

$$\frac{1-\cos(x)}{\frac{x^2}{2}} = \frac{2\sin^2(\frac{x}{2})}{\frac{x^2}{2}} = \frac{\sin^2(\frac{x}{2})}{\frac{x^2}{4}} = \left(\frac{\sin(\frac{x}{2})}{\frac{x}{2}}\right)^2.$$

Or, $\lim_{x\to 0} \frac{x}{2} = 0$ et on a vu précédemment que $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sin(x)}{x} = 1$ donc, par composition, $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sin(\frac{x}{2})}{\frac{x}{2}} = 1$ et, en composant par la fonction carré qui est continue en 1, on conclut que $\lim_{x\to 0} \dfrac{1-\cos(x)}{\frac{x^2}{2}} = 1$ donc $1 - \cos(x) \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{x^2}{2}$.

- Soit $\alpha \in \mathbb{R}^*$. Comme la fonction $f : x \longmapsto (1+x)^\alpha$ est dérivable en 0,

$$\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = f'(0) = \alpha(1+0)^{\alpha-1} = \alpha$$

donc $(1+x)^\alpha - 1 \underset{x\to 0}{\sim} \alpha x$. □

Remarque 24. Comme $\lim_{x\to 0} \mathrm{e}^x = 1 \neq 0$, $\mathrm{e}^x \underset{x\to 0}{\sim} 1$. De même, $\lim_{x\to 0} \cos(x) = 1 \neq 0$ donc $\cos(x) \underset{x\to 0}{\sim} 1$.

Propriété 25

La relation $\underset{a}{\sim}$ est :

- **réflexive** ce qui signifie que, pour toute fonction f qui ne s'annule pas au voisinage de a, $f \underset{a}{\sim} f$;
- **symétrique** ce qui signifie que, pour toutes fonctions f et g qui ne s'annulent pas au voisinage de a, si $f \underset{a}{\sim} g$ alors $g \underset{a}{\sim} f$;
- **transitive** ce qui signifie que, pour toutes fonctions f, g et h qui ne s'annulent pas au voisinage de a, si $f \underset{a}{\sim} g$ et $g \underset{a}{\sim} h$ alors $f \underset{a}{\sim} h$.

Démonstration.

- Pour tout x dans un voisinage de a, $\dfrac{f(x)}{f(x)} = 1 \underset{x\to a}{\longrightarrow} 1$ donc $f \underset{a}{\sim} f$.
- Si $f \underset{a}{\sim} g$ alors $\dfrac{f(x)}{g(x)} \underset{x\to a}{\longrightarrow} 1$ donc $\dfrac{g(x)}{f(x)} \underset{x\to a}{\longrightarrow} 1$ et ainsi $g \underset{a}{\sim} f$.
- Si $f \underset{a}{\sim} g$ et $g \underset{a}{\sim} h$ alors $\dfrac{f(x)}{g(x)} \underset{x\to a}{\longrightarrow} 1$ et $\dfrac{g(x)}{h(x)} \underset{x\to a}{\longrightarrow} 1$ donc $\dfrac{f(x)}{g(x)} \times \dfrac{g(x)}{h(x)} \underset{x\to a}{\longrightarrow} 1 \times 1$ i.e. $\dfrac{f(x)}{h(x)} \underset{x\to a}{\longrightarrow} 1$. Ainsi, $f \underset{a}{\sim} h$. □

Propriété 26

1. Deux fonctions équivalentes en a sont de même signe sur un voisinage de a.
2. Deux fonctions équivalentes en a ont le même comportement (divergente ou convergente) en a. De plus, si l'une admet une limite finie ou infinie en a alors l'autre possède la même limite en a.

Démonstration.

1. Soit f et g deux fonctions équivalentes au voisinage de a. Alors, $\dfrac{f(x)}{g(x)} \xrightarrow[x\to a]{} 1$ alors il existe un voisinage de V de a tel que, pour tout $x \in V \setminus \{a\}$, $\left|\dfrac{f(x)}{g(x)} - 1\right| \leqslant 1$. Ainsi, pour tout $x \in V \setminus \{a\}$, $-1 \leqslant \dfrac{f(x)}{g(x)} - 1$ donc $\dfrac{f(x)}{g(x)} \geqslant 0$ ce qui revient à dire que $f(x)$ et $g(x)$ sont de même signe au voisinage de a
2. Soit f et g deux fonctions équivalentes en a.
   Supposons que g tend vers une limite ℓ (finie ou infinie) en a.
   Si $\ell \neq 0$, pour tout x dans un voisinage de a (a compris), $f(x) = g(x) \times \dfrac{f(x)}{g(x)}$, par définition, $\dfrac{f(x)}{g(x)} \xrightarrow[x\to a]{} 1$ donc, par produit de limite, $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} \ell \times 1 = \ell$.
   Si $\ell = 0$, l'égalité $f(x) = g(x) \times \dfrac{f(x)}{g(x)}$ n'est plus forcément valable en a. La démonstration précédente reste valable à condition de supposer soit que f n'est pas définie en a soit que $f(a) = 0$.
   Par symétrie, si f a un limite ℓ en a, il en est de même pour g et on conclut donc que f et g ont le même comportement au voisinage de a.

$\square$

Exemple 27.

1. Comme $\mathrm{e}^x - 1 \underset{x\to 0}{\sim} x$, la fonction $x \longmapsto \mathrm{e}^x - 1$ a la même signe que x au voisinage de 0.
2. La limite d'un polynôme en $+\infty$ ou en $-\infty$ est égale à la limite de son monôme de plus haut degré.

Propriété 28

Soit f_1, g_1, f_2 et g_2 des fonctions telles que $f_1 \underset{a}{\sim} g_1$ et $f_2 \underset{a}{\sim} g_2$. Alors,

1. $f_1 f_2 \underset{a}{\sim} g_1 g_2$ (on peut multiplier des équivalents) ;
2. $\dfrac{f_1}{f_2} \underset{a}{\sim} \dfrac{g_1}{g_2}$ (on peut diviser des équivalents) ;
3. Pour toute constante réel α, sous réserve d'existence, $f_1^\alpha \underset{a}{\sim} g_1^\alpha$ (on peut élever des équivalents à une puissance constante).
4. Si (u_n) est une suite telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = a$ alors $f_1(u_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} g_1(u_n)$.
5. Soit b un réel ou $+\infty$ ou $-\infty$. Si u est une fonction telle que $\lim\limits_{x\to b} u(x) = a$ alors $f_1 \circ u \underset{b}{\sim} g_1 \circ u$.

Démonstration.

1. Pour tout x au voisinage de a, $\dfrac{f_1 f_2}{g_1 g_2}(x) = \dfrac{f_1(x)}{g_1(x)} \times \dfrac{f_2(x)}{g_2(x)} \xrightarrow[x\to a]{} 1 \times 1 = 1$ donc $f_1 f_2 \underset{a}{\sim} g_1 g_2$.
2. Pour tout x au voisinage de a, $\dfrac{\frac{f_1}{f_2}}{\frac{g_1}{g_2}}(x) = \dfrac{f_1(x)}{g_1(x)} \times \dfrac{g_2(x)}{f_2(x)} \xrightarrow[x\to a]{} 1 \times 1 = 1$ donc $\frac{f_1}{f_2} \underset{a}{\sim} \frac{g_1}{g_2}$.
3. Pour tout x au voisinage de a, $\dfrac{f_1^\alpha}{g_1^\alpha}(x) = \left(\dfrac{f_1(x)}{g_1(x)}\right)^\alpha \xrightarrow[x\to a]{} 1^\alpha = 1$ par continuité de $x \longmapsto x^\alpha$ en 1 donc $f_1^\alpha \underset{a}{\sim} g_1^\alpha$.
4. En tout rigueur, il faut supposer soit que $u_n \neq a$ pour tout n suffisamment grand soit que g n'est pas nulle en a.
   Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{f_1(u_n)}{g_1(u_n)} = \dfrac{f_1}{g_1}(u_n)$. Or, $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} a$ et $\dfrac{f_1(x)}{g_1(x)} \xrightarrow[x\to a]{} 1$ donc, par composition de limites, $\dfrac{f_1(u_n)}{g_1(u_n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$ donc $f_1(u_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} g_1(u_n)$.
5. En tout rigueur, il faut supposer soit que $u(x) \neq a$ pour tout x dans un voisinage de b soit que g n'est pas nulle en a.
   Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{f_1 \circ u)}{g_1 \circ u}(x) = \dfrac{f_1}{g_1}(u(x))$. Or, $u(x) \xrightarrow[x\to b]{} a$ et $\dfrac{f_1(x)}{g_1(x)} \xrightarrow[x\to a]{} 1$ donc, par composition de limites, $\dfrac{f_1 \circ u}{g_1 \circ u}(x) \xrightarrow[x\to b]{} 1$ donc $f_1 \circ u \underset{x\to b}{\sim} g_1 \circ u$.

□

Remarque 29. ATTENTION !!

1. On ne peut pas ajouter ou soustraire des équivalents. Par exemple, $x^2 + x \underset{x\to+\infty}{\sim} x^2 + 1$ et $-x^2 \underset{x\to+\infty}{\sim} -x^2$ mais $(x^2+x)+(-x^2) = x$ n'est pas équivalent en $+\infty$ à $(x^2+1)+(-x^2) = 1$.
2. On ne peut pas élever des équivalents à une puissance non constante. Par exemple, $1 + \dfrac{1}{x} \underset{x\to+\infty}{\sim} 1$ mais $\left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x$ n'est pas équivalent à $1^x = 1$. En effet, cela signifierait que $\left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x$ tend vers 1 en $+\infty$ donc que $\ln\left(\left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x\right)$ tend vers 0. Or, pour tout $x > 0$, $\ln\left(\left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x\right) = x \ln\left(1 + \dfrac{1}{x}\right) \underset{x\to+\infty}{\sim} x \times \dfrac{1}{x} = 1$ car $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} = 0$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln\left(\left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x\right) = 1$.

3. On ne peut pas composer des équivalents par une fonction. Par exemple, $x+1 \underset{x\to+\infty}{\sim} x$ mais e^{x+1} n'est pas équivalent à e^{x} en $+\infty$ car $\dfrac{\mathrm{e}^{x+1}}{\mathrm{e}^{x}} = \mathrm{e}^{x+1-x} = e$ ne tend pas vers 1.

Exemple 30. En utilisant des équivalents, déterminer les limites suivantes.

$$\lim_{x\to 0} \frac{(\mathrm{e}^{2x}-1)\sin(x)}{x^2} \qquad \lim_{x\to+\infty} (x^3+x+2)\sin\left(\frac{1}{2x^3}\right) \qquad \lim_{x\to 0} \frac{(1+x^4)^3-1}{\cos(x^2)-1}.$$

Solution.

• Comme $\lim\limits_{x\to 0} 2x = 0$, $\mathrm{e}^{2x}-1 \underset{x\to 0}{\sim} 2x$. De plus, $\sin(x) \underset{x\to 0}{\sim} x$ donc, par produit et quotient, $\dfrac{(\mathrm{e}^{2x}-1)\sin(x)}{x^2} \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{2x\times x}{x^2} \sim 2$. Ainsi, $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(\mathrm{e}^{2x}-1)\sin(x)}{x^2} = 2$.

• Au voisinage de $+\infty$, $x^3+x+2 \sim x^3$. De plus, $\dfrac{1}{2x^3} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$ donc $\sin\left(\dfrac{1}{2x^3}\right) \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{2x^3}$. Ainsi, par produit, $(x^3+x+2)\sin\left(\dfrac{1}{2x^3}\right) \underset{x\to+\infty}{\sim} x^3 \times \dfrac{1}{2x^3} \sim \dfrac{1}{2}$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} (x^3+x+2)\sin\left(\dfrac{1}{2x^3}\right) = \dfrac{1}{2}$.

• Comme $\lim\limits_{x\to 0} x^3 = 0$, $(1+x^4)^3-1 \underset{x\to 0}{\sim} 3x^4$. De même comme $\lim\limits_{x\to 0} x^2 = 0$, $1-\cos(x^2) \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{(x^2)^2}{2}$ donc, en multipliant par -1, $\cos(x^2)-1 \underset{x\to 0}{\sim} -\dfrac{x^4}{2}$. Par quotient d'équivalents, on en déduit que $\dfrac{(1+x^4)^3-1}{\cos(x^2)-1} \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{3x^4}{-\frac{x^4}{2}} \sim -6$. Ainsi, $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(1+x^4)^3-1}{\cos(x^2)-1} = -6$.

III. — Développements limités

Définition 31

Soit f une fonction définie au voisinage de a et $n \in \mathbb{Z}$. On dit que f est négligeable devant x^n au voisinage de a si

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{x^n} = 0.$$

Dans ce cas, on note $f(x) = \underset{x\to a}{o}(x^n)$, ce qui se lit « $f(x)$ est un petit o de x^n au voisinage de a ».

Exemple 32.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x)}{x^n} = 0$ donc $\ln(x) = \underset{x\to+\infty}{o}(x^n)$.
2. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^5}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0} x^3 = 0$ donc $x^5 = \underset{x\to 0}{o}(x^2)$.

Propriété 33

Soit n et m deux entiers et $k \in \mathbb{R}^*$.

1. Si $0 \leqslant n < m$ alors $x^m = \underset{x\to 0}{o}(x^n)$ et $x^n = \underset{x\to\pm\infty}{o}(x^m)$.
2. $\underset{x\to a}{o}(x^n) \times \underset{x\to a}{o}(x^m) = \underset{x\to a}{o}(x^{n+m})$ et $x^m \times \underset{x\to a}{o}(x^n) = \underset{x\to a}{o}(x^{m+n})$.
3. $\underset{x\to 0}{o}(kx^n) = k\underset{x\to 0}{o}(x^n) = \underset{x\to 0}{o}(x^n)$ et, en particulier, $\underset{x\to a}{o}(x^n) + \underset{x\to a}{o}(x^n) = \underset{x\to a}{o}(x^n)$.

Démonstration.

1. Pour tout $x \neq 0$, $\dfrac{x^m}{x^n} = x^{m-n} \xrightarrow[x \to 0]{} 0$ et $\dfrac{x^n}{x^m} = \dfrac{1}{x^{m-n}} \xrightarrow[x \to \pm\infty]{} 0$ car $m - n > 0$. Ainsi, $x^m = \underset{x \to 0}{o}(x^n)$ et $x^n = \underset{x \to \pm\infty}{o}(x^m)$.
2. Pour tout $x \neq 0$, $\dfrac{\underset{x \to a}{o}(x^n) \times \underset{x \to a}{o}(x^m)}{x^{n+m}} = \dfrac{\underset{x \to a}{o}(x^n)}{x^n} \times \dfrac{\underset{x \to a}{o}(x^m)}{x^m} \xrightarrow[x \to a]{} 0 \times 0 = 0$ donc $\underset{x \to a}{o}(x^n) \times \underset{x \to a}{o}(x^m) = \underset{x \to a}{o}(x^{n+m})$.

   De même, pour tout $x \neq 0$, $\dfrac{x^m \times \underset{x \to a}{o}(x^n)}{x^{n+m}} = \dfrac{x^m}{x^m} \times \dfrac{\underset{x \to a}{o}(x^n)}{x^n} \xrightarrow[x \to a]{} 1 \times 0 = 0$ donc $x^m \times \underset{x \to a}{o}(x^n) = \underset{x \to a}{o}(x^{m+n})$.
3. Pour tout $x \neq 0$, $\dfrac{\underset{x \to a}{o}(x^n)}{kx^n} = k \times \dfrac{\underset{x \to a}{o}(kx^n)}{kx^n} \xrightarrow[x \to a]{} k \times 0 = 0$ donc $\underset{x \to a}{o}(kx^n) = \underset{x \to a}{o}(x^n)$.

   Pour tout $x \neq 0$, $\dfrac{k \underset{x \to a}{o}(x^n)}{x^n} = k \times \dfrac{\underset{x \to a}{o}(x^n)}{x^n} \xrightarrow[x \to a]{} k \times 0 = 0$ donc $k \underset{x \to a}{o}(x^n) = \underset{x \to a}{o}(x^n)$.
   En particulier, $\underset{x \to a}{o}(x^n) + \underset{x \to a}{o}(x^n) = 2 \underset{x \to a}{o}(x^n) = \underset{x \to a}{o}(x^n)$.

□

Exemple 34. $x^2 + x + \ln(x) = x^2 + \underset{x \to +\infty}{o}(x^2) + \underset{x \to +\infty}{o}(x^2) = x^2 + \underset{x \to +\infty}{o}(x^2)$.

Propriété 35

Soit f une fonction définie au voisinage de a, $n \in \mathbb{Z}$ et $\lambda \in \mathbb{R}^*$. Alors, $f(x) = \lambda x^n + \underset{x \to a}{o}(x^n)$ si et seulement si $f(x) \underset{x \to a}{\sim} \lambda x^n$.

Démonstration. Par définition, $f(x) = \lambda x^n + \underset{x \to a}{o}(x^n)$ si et seulement si $\dfrac{f(x) - \lambda x^n}{x^n} \xrightarrow[x \to a]{} 0$ ce qui équivaut à dire, comme $\lambda \neq 0$, que $\dfrac{f(x)}{\lambda x^n} - 1 \xrightarrow[x \to a]{} 0$ i.e. $\dfrac{f(x)}{\lambda x^n} \xrightarrow[x \to a]{} 1$. On conclut que $f(x) = \lambda x^n + \underset{x \to a}{o}(x^n)$ si et seulement si $f(x) \underset{x \to a}{\sim} \lambda x^n$. □

Propriété 36

Soit f une fonction définie au voisinage de 0 et $n \in \mathbb{N}$. On dit que f admet un développement limité à l'ordre n au voisinage de 0 ($\mathrm{DL}_n(0)$) s'il existe $P \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que

$$f(x) = P(x) + \underset{x \to 0}{o}(x^n).$$

Autrement dit, f admet un $\mathrm{DL}_n(0)$ s'il existe des réels a_0, a_1, ..., a_n tels que

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n + \underset{x \to 0}{o}(x^n).$$

Remarque 37. Dans la suite, sauf mention du contraire, tous les o sont au voisinage de 0 et on écrira simplement $o(x^n)$ plutôt que $\underset{x \to 0}{o}(x^n)$.

Exemple 38. Soit $f : x \longmapsto x^5 + x^3 + x + 2$. Alors, $f(x) = 2 + x + o(x)$ donc f admet un $\mathrm{DL}_1(0)$. De même, $f(x) = 2 + x + x^3 + o(x^4)$ donc f admet un $\mathrm{DL}_4(0)$.

Exemple 39. Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer un $\mathrm{DL}_n(0)$ de $f : x \longmapsto \dfrac{1}{1-x}$.

Solution. Pour tout réel $x \neq 1$, $\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x} = \frac{1}{1-x} - \frac{x}{1-x} \times x^n$ donc $\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{n} x^k + \frac{x}{1-x} \times x^n$. Or, $\frac{x}{1-x} \xrightarrow[x\to 0]{} 0$ donc $\frac{x}{1-x} \times x^n = o(x^n)$. Ainsi, $\frac{1}{1-x} = 1+x+x^2+\cdots+x^n+o(x^n)$ est un $\mathrm{DL}_n(0)$ de f.

Propriété 40

Soit $n \in \mathbb{N}$. Si f admet un $\mathrm{DL}_n(0)$ alors celui-ci est unique. Autrement dit, s'il existe des polynômes P et Q dans $\mathbb{R}_n[X]$ tels que $f(x) = P(x) + o(x^n)$ et $f(x) = Q(x) + o(x^n)$ alors $P = Q$.

Démonstration. Supposons qu'il existe des polynômes P et Q de degré au plus n tels que $f(x) = P(x) + o(x^n) = Q(x) + o(x^n)$. Écrivons $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ et $Q = \sum_{k=0}^{n} b_k X_k$ (certains coefficients pouvant être nuls). Supposons, par l'absurde, que $P \neq Q$ et notons m l'indice du plus petit entier $k \in [\![0, n]\!]$ tel que $a_k \neq b_k$. Alors, comme $\sum_{k=0}^{n} a_k x^k + o(x^n) = \sum_{k=0}^{n} b_k x^k + o(x^n)$ et $a_k = b_k$ pour tout $k \in [\![0, m-1]\!]$, on en déduit que $\sum_{k=m}^{n} a_k x^k + o(x^n) = \sum_{k=m}^{n} b_k x^k + o(x^n)$ donc $(a_m - b_m)x^m = \sum_{k=m+1}^{n} b_k x^k - \sum_{k=m+1}^{n} a_k + o(x^n) - o(x^n) = \sum_{k=m+1}^{n} (b_k - a_k)x^k + o(x^n)$ car $o(x^n) - o(x^n) = o(x^n) + (-1)o(x^n) = o(x^n) + o(x^n) = o(x^n)$.

En remarquant que $x^m o(x^{n-m}) = o(x^n)$, on en déduit que $\frac{o(x^n)}{x^m} = o(x^{n_m})$ donc, en divisant l'inégalité précédente par x^m, il vient $a_m - b_m = \sum_{k=m+1}^{n} (b_k - a_k)x^{k-m} + o(x^{n-m}) \xrightarrow[x\to 0]{} 0$ donc $a_m = b_m$ ce qui contredit la définition de m.

Ainsi, $P = Q$ et le $\mathrm{DL}_n(0)$ de f est unique. □

Propriété 41

Soit f une fonction définie au voisinage de 0.

1. f admet un $\mathrm{DL}_0(0)$ si et seulement si f admet une limite finie ℓ en 0 et alors
$$f(x) = \ell + o(1).$$
2. f admet un $\mathrm{DL}_1(0)$ si et seulement si f est dérivable en 0 et alors
$$f(x) = f(0) + f'(0)x + o(x).$$

Démonstration.

1. Supposons que f admet une limite finie ℓ en 0. Alors, $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-\ell}{1} = \lim_{x\to 0} f(x) - \ell = 0$ donc $f(x) - \ell = o(1)$ et ainsi $f(x) = \ell + o(1)$. On en déduit donc que f admet un $\mathrm{DL}_0(0)$. Réciproquement, supposons que f admet un $\mathrm{DL}_0(0)$. Alors, il existe un polynôme $P \in \mathbb{R}_0[X]$ tel que $f(x) = P(x) + o(1)$. Or, un polynôme de degré au plus 0 est constant donc il existe une constante ℓ telle que $f(x) = \ell + o(1)$ et, comme $o(1) \xrightarrow[x\to 0]{} 0$, $f(x) \xrightarrow[x\to 0]{} \ell$.

   Remarque. Dans le cas précédent, f est continue en 0 et $\ell = f(0)$.

2. Supposons que f est dérivable en 0. Alors, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=f'(0)$ donc

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-(f(0)+f'(0)x)}{x}=0$$

i.e. $f(x)-(f(0)+f'(0)x)=o(x)$ et ainsi $f(x)=f(0)+f'(0)x+o(x)$. On en déduit donc que f admet un $\mathrm{DL}_1(0)$.

Réciproquement, supposons que f admet un $\mathrm{DL}_1(0)$. Alors, il existe un polynôme $P\in\mathbb{R}_1[X]$ tel que $f(x)=P(x)+o(x)$. Or, un polynôme de degré au plus 1 est de la forme $aX+b$ avec a et b réels il existe deux réels a et b tels que $f(x)=b+ax+o(x)$. Dès lors, $f(x)=b+o(1)$ donc $b=f(0)$ par la remarque précédente. De plus, pour $x\neq 0$, $\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\dfrac{ax+o(x)}{x}=a+o(1)\xrightarrow[x\to 0]{}a$ donc f est dérivable en 0 et $f'(0)=a$. Par suite, $f(x)=f(0)+f'(0)x+o(x)$.

□

Remarque 42. Si f admet un $\mathrm{DL}_1(0)$ alors celui-ci est $f(x)=f(0)+f'(0)x+o(x)$ et il fait apparaître l'équation de la tangente à $\mathscr{C}_f$ en 0 : $y=f'(0)x+f(0)$. On verra que ceci, associé aux propriétés 35 et 26 permet de déterminer la position relative de la courbe et de la tangente au voisinage de 0.

Propriété 43

Les développements limités étant des égalités, on peut les additionner, les soustraire, les multiplier, faire des substitutions pour obtenir d'autres développements limités.

Exemple 44. Soit $n\in\mathbb{N}$. À partir du résultat de l'exemple 39, déterminer le $\mathrm{DL}_n(0)$ de $x\longmapsto\dfrac{1}{1+x}$ puis en déduire celui de $x\longmapsto\dfrac{1}{1+x^2}$.

Solution. On a vu que $\dfrac{1}{1-x}=1+x+x^2+\cdots+x^n+o(x^n)$. Or, $-x\xrightarrow[x\to 0]{}0$ donc $\dfrac{1}{1+x}=\dfrac{1}{1-x}=1+(-x)+(-x)^2+\cdots+(-x)^n+o((-x)^n)$ et, comme $o((-x)^n)=o(-1)^nx^n)=o(x^n)$ car (-1) est une constante, $\dfrac{1}{1+x}=1-x+x^2+\cdots+(-1)^nx^n+o(x^n)$.

Comme $x^2\xrightarrow[x\to 0]{0}0$, on en déduit que $\dfrac{1}{1+x^2}=1-x^2+(x^2)^2+\cdots+(-1)^n(x^2)^n+o((x^2)^n)$.

Si n est pair, il existe un entier k tel que $n=2k$. Alors,

$$\frac{1}{1+x}=1-x^2+x^4-\cdots+(-1)^kx^{2k}+\underbrace{(-1)^{k+1}x^{2k+2}+\cdots+(-1)^nx^{2n}+o(x^{2n})}_{o(x^{2k})}$$

donc le $\mathrm{DL}_n(0)$ de $\dfrac{1}{1+x^2}$ est $\dfrac{1}{1+x^2}=1-x^2+x^4-\cdots+(-1)^kx^{2k}+o(x^{2k})$.

Si n est impair, il existe un entier k tel que $n=2k+1$. Alors,

$$\frac{1}{1+x}=1-x^2+x^4-\cdots+(-1)^kx^{2k}+\underbrace{(-1)^{k+1}x^{2k+2}+\cdots+(-1)^nx^{2n}+o(x^{2n})}_{o(x^{2k+1})}$$

donc le $\mathrm{DL}_n(0)$ de $\dfrac{1}{1+x^2}$ est $\dfrac{1}{1+x^2}=1-x^2+x^4-\cdots+(-1)^kx^{2k}+o(x^{2k+1})$.

Propriété 45

Soit f une fonction définie sur un intervalle I contenant 0 et admettant un $\mathrm{DL}_n(0)$ de la forme
$$f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n + o(x^n).$$
Si F est une primitive de f sur I alors F admet un $\mathrm{DL}_{n+1}(0)$ de la forme
$$F(x) = F(0) + a_0 x + \frac{a_1}{2}x^2 + \cdots + \frac{a_n}{n+1}x^{n+1} + o(x^{n+1}).$$

Démonstration. Supposons que F soit une primitive de f sur I et $G : x \longmapsto F(x) - F(0) - \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{k+1}x^{k+1}$ définie sur I. Alors, G est dérivable sur I comme somme de fonctions dérivables et, pour tout $x \in I$, $G'(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ donc $G'(x) = o(x^n)$.

Soit $x \in I \setminus \{0\}$. Comme G est dérivable sur I, d'après le théorème des accroissements finis, il existe c_x entre 0 et x tel que $\frac{G(x)}{x} = G'(c_x)$. Pour tout $x \in I \setminus \{0\}$, on choisit un tel c_x. Considérons alors la fonction h définie sur $I \setminus \{0\}$ qui à x associe c_x. Pour tout $x \neq 0$, $h(x)$ est compris entre 0 et x donc $\left|\frac{h(x)}{x}\right| \leqslant 1$. Dès lors, pour $x \neq 0$,
$$\left|\frac{G(x)}{x^{n+1}}\right| = \left|\frac{G(x)}{x} \times \frac{1}{x^n}\right| = \left|\frac{G'(h(x))}{x^n}\right| = \left|\frac{G'(h(x))}{h(x)^n}\right| \times \left|\frac{h(x)}{x}\right|^n \leqslant \left|\frac{G'(h(x))}{h(x)^n}\right| \xrightarrow[x \to 0]{} 0$$
car $G'(x) = o(x^n)$ et $h(x) \xrightarrow[x \to 0]{} 0$ (car $0 \leqslant h(x) \leqslant x$) donc, par composition, $G'(h(x)) = o(h(x)^n)$.

Ainsi, $G(x) = o(x^{n+1})$ donc $F(x) - F(0) - \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{k+1}x^{k+1} = o(x^{n+1})$ soit finalement $F(x) = F(0) + \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{k+1}x^{k+1} + o(x^{n+1})$, ce qui permet de conclure que F admet un $\mathrm{DL}_{n+1}(0)$ et qu'il a bien la forme annoncée. □

Corollaire 46

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + o(x^n)$.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\exp(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$.

Démonstration.

1. On a vu que $\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + x^n + o(x^n)$ donc, par la propriété précédente,
$$ln(1+x) = \ln(1) + x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + o(x^n).$$
2. Considérons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la proposition $\mathcal{P}(n)$: « $\exp(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$ ».

- **Initialisation.** Comme exp est continue en 0, $\exp(x) = \exp(0) + o(1) = 1 + o(1)$ donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
- **Hérédité.** Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $\mathcal{P}(n)$ est vraie. Alors,

$$\exp(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$$

donc, comme exp est une primitive d'elle-même sur $\mathbb{R}$, d'après la propriété précédente,

$$\exp(x) = \exp(0) + x + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} + o(x^{n+1})$$

donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
- **Conclusion.** Par le principe de récurrence, on conclut que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\exp(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$.

$\square$

Exemple 47.

1. Déduire de ce qui précède l'équation de la tangente à la courbe de la fonction exp en 0 et donner les positions relatives de la courbe et de cette tangente au voisinage de 0.
2. Déterminer un $\mathrm{DL}_3(0)$ de la fonction $x \longmapsto \dfrac{\mathrm{e}^x}{x-1}$.
3. Déterminer un $\mathrm{DL}_3(0)$ de la fonction $x \longmapsto 3\mathrm{e}^x - 2\ln(1+x)$.

Solution.

1. Comme $\exp(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)$, $\exp(x) - (1+x) \sim \frac{x^2}{2}$ donc, dans un voisinage de 0, $\exp(x) - (1+x) \geqslant 0$ i.e. $\exp(x) \geqslant 1 + x$. Ainsi, dans un voisinage de 0, la courbe de exp est au-dessus de sa tangente en 0. (En fait, on a vu en première année que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\exp(x) \geqslant x + 1$ donc la courbe est toujours au-dessus de sa tangente).
2. Comme $\exp(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3)$ et $\frac{1}{x-1} = -\frac{1}{1-x} = -1 - x - x^2 - x^3 + o(x^2)$,

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{e}^x}{x-1} &= \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^6)\right)\left(-1 - x - x^2 - x^3 + o(x^2)\right)\\ &= -1 - x - x^2 - x^3 - x - x^2 - x^3 - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{2} - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\\ &= -1 - 2x - \frac{5}{2}x^2 - \frac{8}{3}x^3 + o(x^3)\end{aligned}$$

3. De même,

$$\begin{aligned}3\mathrm{e}^x - 2\ln(1+x) &= 3\left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right) - 2\left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)\right)\\ &= 3 + x + \frac{5}{2}x^2 - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)\end{aligned}$$

Théorème 48. Formule de Taylor-Young

Soit $n \in \mathbb{N}$ et f une fonction de classe $\mathscr{C}^n$ sur un intervalle I contenant 0. Alors, f admet un $\mathrm{DL}_n(0)$ donné par

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{3!}x^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + o(x^n).$$

Démonstration. Considérons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la proposition suivante $\mathcal{P}(n)$ « pour tout fonction de classe $\mathscr{C}^n$ sur I, le $\mathrm{DL}_n(0)$ est $f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{3!}x^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + o(x^n)$ ».

Initialisation. Soit f une fonction de classe $\mathscr{C}^0$ sur I. Alors, f est continue sur I donc, d'après la propriété 41, $f(x) = f(0) + o(1)$ donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $\mathcal{P}(n)$ est vraie. Soit f une fonction de classe $\mathscr{C}^{n+1}$ sur I. Alors, f est dérivable et f' est de classe $\mathscr{C}^n$ sur I. Dès lors, comme $\mathcal{P}(n)$ est vraie, f' admet un $\mathrm{DL}_n(0)$ et

$$f'(x) = f'(0) + (f')'(0)x + \frac{(f')''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{(f')^{(n)}(0)}{n!}x^n + o(x^n)$$

i.e.

$$f'(x) = f'(0) + f''(0)x + \frac{f^{(3)}(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n+1)}(0)}{n!}x^n + o(x^n).$$

Dès lors, d'après la proposition 45, f admet un $\mathrm{DL}_{n+1}(0)$ et

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{3!}x^3 + \cdots + \frac{f^{(n+1)}(0)}{(n+1)!}x^{n+1} + o(x^{n+1})$$

donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

Conclusion. Par le principe de récurrence, on conclut que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$, ce qui démontre la propriété. □

Exemple 49. Déterminer le $\mathrm{DL}_2(0)$ de la fonction $f : x \longmapsto \dfrac{1}{2+\mathrm{e}^x}$.

Solution. La fonction f est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ comme somme et quotient de fonction de référence et, pour tout réel x,

$$f'(x) = -\frac{\mathrm{e}^x}{(2+\mathrm{e}^x)^2}$$

et

$$f''(x) = -\frac{\mathrm{e}^x(2+\mathrm{e}^x)^2 - \mathrm{e}^x \times 2\mathrm{e}^x(2+\mathrm{e}^x)}{(2+\mathrm{e}^x)^4} = -\frac{\mathrm{e}^x(2+\mathrm{e}^x)\left[(2+\mathrm{e}^x) - 2\mathrm{e}^x\right]}{(2+\mathrm{e}^x)^4} = \frac{\mathrm{e}^x - 2}{(2+\mathrm{e}^x)^3}.$$

On en déduit que $f(0) = \frac{1}{3}$, $f'(0) = -\frac{1}{9}$ et $f''(0) = -\frac{1}{27}$ donc, par la formule de Taylor-Young,

$$f(x) = \frac{1}{3} - \frac{1}{9}x - \frac{\frac{1}{27}}{2!}x^2 + o(x^2) = \frac{1}{3} - \frac{1}{9}x - \frac{1}{54}x^2 + o(x^2).$$

Remarque 50. La dérivée d'une fonction paire étant impaire et la dérivée d'une fonction impaire étant paire, la formule de Taylor-Young implique qu'un développement limité en 0 d'une fonction paire ne contient que des puissances paires et le développement limité d'une fonction impaire ne contient que des puissances impaires.

Corollaire 51 : DL usuels à connaître

- $\dfrac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + o\left(x^n\right)$
- $\dfrac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + \cdots + (-1)^n x^n + o\left(x^n\right)$
- $\mathrm{e}^x = 1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^3}{3!} + \cdots + \dfrac{x^n}{n!} + o\left(x^n\right)$
- $\cos(x) = 1 - \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^n \dfrac{x^{2n}}{(2n)!} + o\left(x^{2n}\right)$
- $\sin(x) = x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^n \dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o\left(x^{2n+1}\right)$
- $\ln(1+x) = x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^{n-1} \dfrac{x^n}{n} + o\left(x^n\right)$
- $\forall \alpha \in \mathbb{R},\ (1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \dfrac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \cdots + \dfrac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} x^n + o\left(x^n\right)$

Démonstration. Les développements limités de $x \longmapsto \dfrac{1}{1-x}$, $x \longmapsto \dfrac{1}{1+x}$, exp et $x \longmapsto \ln(1+x)$ ont déjà été vus. Ils peuvent être retrouvés à l'aide de la formule de Taylon-Young.

Comme la fonction cos est de classe $\mathcal{C}^{+\infty}$, elle admet des développements limités à tout ordre. De plus, on a vu que la dérivée de cos est périodique : pour tout entier k, $\cos^{(4k)}(x) = \cos(x)$, $\cos^{(4k+1)}(x) = -\sin(x)$, $\cos^{(4k+2)}(x) = -\cos(x)$ et $\cos^{(4k+3)}(x) = \sin(x)$ donc $\cos^{(4k)}(0) = 1$, $\cos^{(4k+1)}(0) = 0$, $\cos^{(4k+2)}(0) = -1$ et $\cos^{(4k+3)}(0) = 1$. Grâce à la formule de Taylor-Young, on en déduit que, pour tout entier naturel n,

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o\left(x^{2n}\right).$$

De même, la fonction sin est de classe $\mathcal{C}^{+\infty}$, elle admet des développements limités à tout ordre. De plus, la dérivée de sin est périodique : pour tout entier k, $\sin^{(4k)}(x) = \sin(x)$, $\sin^{(4k+1)}(x) = \cos(x)$, $\sin^{(4k+2)}(x) = -\sin(x)$ et $\sin^{(4k+3)}(x) = -\cos(x)$ donc $\sin^{(4k)}(0) = 0$, $\sin^{(4k+1)}(0) = 1$, $\sin^{(4k+2)}(0) = 0$ et $\sin^{(4k+3)}(0) = -1$. Grâce à la formule de Taylor-Young, on en déduit que, pour tout entier naturel n,

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o\left(x^{2n+1}\right).$$

Pour finir, considérons $\alpha \in \mathbb{R}$ et $fx \longmapsto (1+x)^{\alpha)}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, considérons alors la proposition $\mathcal{P}(n)$: « f est n fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout réel x, $f^{(n)}(x) = \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n}$ ».

On va montrer que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Initialisation. Par définition, pour tout réel x, $f^{(0)}(x) = f(x) = (1+x)^\alpha$ donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $\mathcal{P}(n)$ est vraie. Alors, f est n fois dérivable et, pour tout réel x, $f^{(n)}(x) = \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n}$. Il s'ensuit que f est $n+1$ dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f^{(n+1)}(x) = \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)(\alpha-n)x^{\alpha-n-1}$ donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie. **Conclusion.** Par le principe de récurrence, on conclut que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Dès lors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f^{(n)}(0) = \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)$ et donc, par le formule de Taylor-Young,

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha\left(\alpha-1\right)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{\alpha\left(\alpha-1\right)\cdots\left(\alpha-n+1\right)}{n!}x^n + o\left(x^n\right).$$

□

Exemple 52.

1. Déterminer le $\mathrm{DL}_3(0)$ de $x \longmapsto \cos(x) + \sin(x)$
2. Déterminer le $\mathrm{DL}_2(0)$ de $x \longmapsto \cos(x)\sqrt{1+x}$
3. Déterminer le $\mathrm{DL}_3(0)$ de $x \longmapsto \dfrac{\sin(x^2)}{1-x}$
4. Déterminer le $\mathrm{DL}_3(0)$ de $x \longmapsto \ln\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)$;
5. Déterminer la limite en 0 de $x \longmapsto \dfrac{1+x-\mathrm{e}^x}{1-\cos(x)}$.

Solution.

1. $\cos(x) + \sin(x) = 1 - \dfrac{x^2}{2} + o(x^3) + x - \dfrac{x^3}{6} + o(x^3) = 1 + x - \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x^3}{6} + o(x^3)$.
2. $$\begin{aligned}\cos(x)\sqrt{1+x} &= \left(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right)\left(1 + \frac{1}{2}x + \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)}{2}x^2 + o(x^2)\right)\\ &= \left(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right)\left(1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + o(x^2)\right)\\ &= 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)\\ &= 1 + \frac{1}{2}x - \frac{5}{8}x^2 + o(x^2)\end{aligned}$$
3. On sait que $\sin(x) = x + o(x^2)$ donc, comme $\lim\limits_{x\to 0} x^2 = 0$, $\sin(x^2) = x^2 + o((x^2)^2) = x^2 + o(x^4) = x^2 + o(x^3)$. Ainsi,
$$\frac{\sin(x^2)}{1-x} = \sin(x^2) \times \frac{1}{1-x} = (x^2 + o(x^3))(1 + x + x^2 + x^3 + o(x)) = x^2 + x^3 + o(x^3).$$
4. Pour tout réel $x \in \left]-1\,;1\right[$, $\ln\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right) = \ln(1-x) + \ln(1+x)$ donc, comme $\lim\limits_{x t o 0}(-x) = 0$,
$$\ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right) = (-x) - \frac{(-x)^2}{2} + \frac{(-x)^3}{3} + o(x^3) - \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)\right) = -2x - \frac{2}{3}x^3 + o(x^3).$$
5. Comme $1 + x - \mathrm{e}^x = 1 + x - \left(1 + x + \dfrac{x^2}{2} + o(x^2)\right) = -\dfrac{x^2}{2} + o(x^2)$, $1 + x - \mathrm{e}^x \underset{x\to 0}{\sim} -\dfrac{x^2}{2}$. On en déduit que
$$\frac{1+x-\mathrm{e}^x}{1-\cos(x)} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{-\frac{x^2}{2}}{\frac{x^2}{2}} \underset{x\to 0}{\sim} -1$$
donc $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1+x-\mathrm{e}^x}{1-\cos(x)} = -1$.

Définition 53

Soit $n \in \mathbb{N}$.

1. Soit a un réel quelconque et f une fonction définie au voisinage de a. On dit que f admet un développement limité à l'ordre n au voisinage de a ($\mathrm{DL}_n(a)$) si la fonction $g : h \longmapsto f(a+h)$ admet un $\mathrm{DL}_n(0)$. Le $\mathrm{DL}_n(a)$ de f est alors le $\mathrm{DL}_n(0)$ de g appliqué en $h = x - a$.
2. Ici, a désigne $+\infty$ ou $-\infty$ et f une fonction définie au voisinage de a. On dit que f admet un développement limité à l'ordre n au voisinage de a ($\mathrm{DL}_n(a)$) si la fonction $g : t \longmapsto f\left(\dfrac{1}{t}\right)$ admet un $\mathrm{DL}_n(0)$. Le $\mathrm{DL}_n(a)$ de f est alors le $\mathrm{DL}_n(0)$ de g appliqué en $t = \dfrac{1}{x}$.

Exemple 54.

1. Déterminer le $\mathrm{DL}_3(1)$ de la fonction exponentielle.
2. Déterminer le $\mathrm{DL}_3(2)$ de la fonction inverse.
3. Déterminer le $\mathrm{DL}_3(+\infty)$ de la fonction $x \longmapsto \dfrac{1}{1+x}$.
4. Déterminer le $\mathrm{DL}_3(+\infty)$ de la fonction $f : x \longmapsto \frac{1}{x}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$

Solution.

1. Considérons $g : h \longmapsto \exp(1+h)$. Alors, g est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ et, pour tout réel h, $g'(h) = \exp(1+h)$ et $g''(h) = \exp(1+h)$ donc $g(0) = g'(0) = g''(0) = e$. Grâce à la formule de Taylor-Young, on en déduit que $g(h) = e + eh + \dfrac{e}{2}h^2 + \dfrac{e}{6}h^3 + o(h^3)$ donc $\mathrm{e}^x = e + e(x-1) + \dfrac{e}{2}(x-1)^2 + \dfrac{e}{6}(x-1)^3 + \underset{x\to 1}{o}((x-1)^3)$.
   Remarque. Pour déterminer le $\mathrm{DL}_3(0)$ de g, on aurait également pu utiliser le fait que, pour tout réel x, $\mathrm{e}^{1+h} = ee^h = \mathrm{e}\left(1 + h + \dfrac{h^2}{2} + \dfrac{h^3}{6} + o(h^3)\right)$
2. Considérons $g : x \longmapsto \dfrac{1}{2+h}$. Alors, pour tout réel $h > -2$, $g(h) = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{2+\frac{h}{2}}$ donc, comme $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{h}{2} = 0$,
   $$g(h) = \frac{1}{2} \times \left(1 - \frac{h}{2} + \left(\frac{h}{2}\right)^2 - \left(\frac{h}{2}\right)^3 + o\left(\left(\frac{h}{2}\right)^2\right)\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}h + \frac{1}{8}h^2 - \frac{1}{16}h^3 + o(h^3).$$
   Ainsi, $\dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{4}(x-2) + \dfrac{1}{8}(x-2)^2 - \dfrac{1}{16}(x-2)^3 + \underset{x\to 2}{o}((x-2)^3)$.
3. Considérons $g : t \longmapsto \dfrac{1}{1+\frac{1}{t}}$. Alors,
   $$g(t) = \frac{t}{1+t} = t \times \frac{1}{1+t} = t\left(1 - t + t^2 + o(t^2)\right) = t - t^2 + t^3 + o(t^3)$$
   donc $\dfrac{1}{1+x} = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{x^3} + \underset{x\to+\infty}{o}\left(\dfrac{1}{x^3}\right)$.
4. Considérons $g : t \longmapsto \dfrac{1}{\frac{1}{t}}\mathrm{e}^{\frac{1}{\frac{1}{t}}}$. Alors, $g(t) = t\mathrm{e}^t = t\left(1 + t + \dfrac{t^2}{2} + t(t^2)\right) = t + t^2 + \dfrac{t^3}{2} + o(t^3)$ donc $f(x) = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{2x^3} + \underset{x\to+\infty}{o}\left(\dfrac{1}{x^3}\right)$.