⧫ Chapitre 5. Étude locale d'une fonction

I. — Rappels et compléments sur la dérivation

Dans tout ce paragraphe, f est une fonction numérique, $a \in \mathcal{D}_f$ et on suppose qu'il existe un intervalle I non réduit à un point tel que $a \in I \subset \mathcal{D}_f$.

1) Nombre dérivé

Définition 1

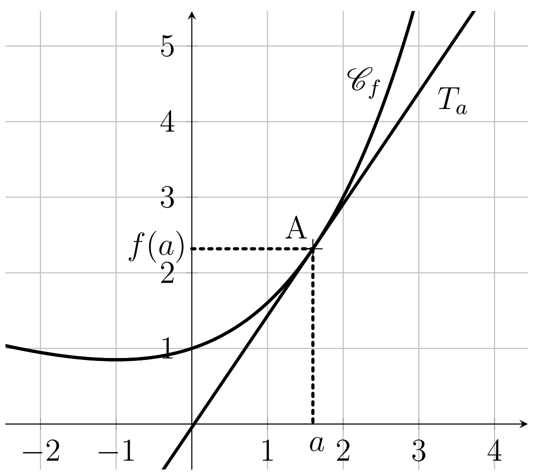
On dit que f est **dérivable en** a si le taux de variation $t(h) = \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$ admet une limite finie quand h tend vers 0. Cette limite est alors appelée le nombre dérivé de f en a et se note $f'(a)$ ou $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(a)$.

Remarque 2. Si f est dérivable en a alors, par définition, $f'(a) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$ ce qui peux aussi s'écrire, en posant $x = a + h$, $f'(a) = \lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$. Ceci peut parfois servir pour calculer des limites.

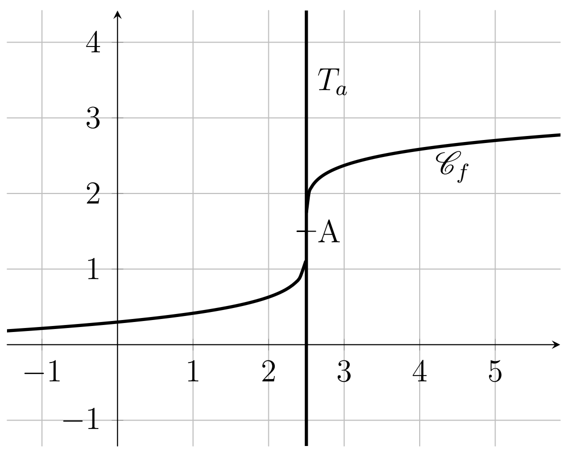
Définition 3

On suppose que a n'est pas une borne de $\mathcal{D}_f$ et on note A le point de coordonnées $(a\,;f(a))$

1. Si f est dérivable en a, on appelle tangente à $\mathscr{C}_f$ au point A la droite passant par A et dont le coefficient directeur est $f'(a)$.
2. Si f n'est pas dérivable en a mais si son taux de variation en a diverge vers $+\infty$ ou vers $-\infty$ lorsque h tend 0, on dit que $\mathscr{C}_f$ possède une tangente verticale en A.



Tangente dans le cas où f est dérivable en a



Tangente verticale en A

Remarque 4. Si a est une borne de $\mathcal{D}_f$, on peut prolonger la définition précédente mais on parle plutôt, dans ce cas, de demi-tangente.

Propriété 5

Si a n'est pas une borne de $\mathcal{D}_f$ et si f est dérivable en a alors la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse a a pour équation réduite

$$y = f'(a)(x-a) + f(a).$$

2) Fonction dérivée

a) Définition

Définition 6

1. Si f est dérivable en tout point $a \in \mathcal{D}_f$, on dit que f est dérivable sur $\mathcal{D}_f$.
2. Si f est dérivable sur $\mathcal{D}_f$, on définit la fonction dérivée (ou simplement la dérivée) de f comme la fonction qui à tout $a \in \mathcal{D}_f$ associe le nombre $f'(a)$. On note cette fonction f' ou $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$.

b) Dérivées des fonctions usuelles

On désigne par c, a, b et α des constantes réelles et par n un entier naturel non nul.

La dérivée de	est	sur
$x \longmapsto c$	$x \longmapsto 0$	$\mathbb{R}$
$x \longmapsto ax+b$	$x \longmapsto a$	$\mathbb{R}$
$x \longmapsto x^n$	$x \longmapsto nx^{n-1}$	$\mathbb{R}$
$x \longmapsto \dfrac{1}{x^n}$	$x \longmapsto -\dfrac{n}{x^{n+1}}$	$]-\infty\,;0[\cup]0\,;+\infty[$
$x \longmapsto \sqrt{x}$	$x \longmapsto \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0\,;+\infty[$
$x \longmapsto x^\alpha$	$x \longmapsto \alpha x^{\alpha-1}$	$]0\,;+\infty[$
exp	exp	$\mathbb{R}$
ln	$x \longmapsto \dfrac{1}{x}$	$]0\,;+\infty[$
sin	cos	$\mathbb{R}$
cos	$-\sin$	$\mathbb{R}$
tan	$x \longmapsto \dfrac{1}{\cos^2(x)} = 1+\tan^2(x)$	$\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2}+k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$
arctan	$x \longmapsto \dfrac{1}{1+x^2}$	$\mathbb{R}$

3) Dérivée et opérations algébriques

Si u et v sont deux fonctions dérivables sur un même ensemble E et si k est un réel alors les fonctions $u+v$, ku, uv, $\dfrac{1}{v}$ et $\dfrac{u}{v}$ sont dérivables sur leurs ensembles de définition respectifs et

$(u+v)' = u' + v'$	$(ku)' = ku'$	$(uv)' = u'v + uv'$	$\left(\dfrac{1}{v}\right)' = -\dfrac{v'}{v^2}$	$\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$

4) Dérivée d'une fonction composée

Théorème 7

Soit v une fonction définie sur un intervalle J et u une fonction définie sur un intervalle I telle que, pour tout $x \in I$, $u(x) \in J$. Si u est dérivable sur I et si v est dérivable sur J alors la composée $v \circ u$ est dérivable sur I et $(v \circ u)' = u' \times (v' \circ u)$.

Remarque 8. En particulier, si u est une fonction dérivable sur un ensemble E et si $n \in \mathbb{N}$ alors

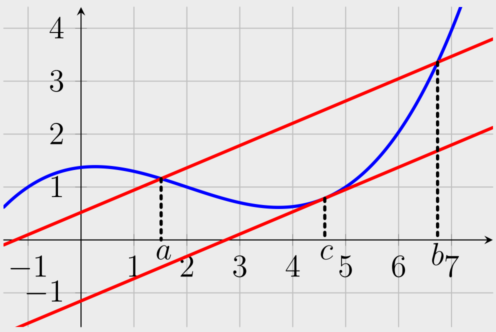
- la fonction e^u est dérivable sur E et $(\mathrm{e}^u)' = u'\mathrm{e}^u$
- la fonction u^n est dérivable sur E et $(u^n)' = nu'u^{n-1}$.
- si u ne s'annule pas sur E alors la fonction $\frac{1}{u^n}$ est dérivable sur E et $\left(\frac{1}{u^n}\right)' = -\frac{nu'}{u^{n+1}}$.
- si u est strictement positive sur E alors $\ln(u)$ est dérivable sur E et $(\ln(u))' = \frac{u'}{u}$.

5) Théorème des accroissements finis

Théorème 9

Soit I un intervalle et f une fonction dérivable sur I. Alors, pour tous éléments a et b de I tels que $a < b$, il existe $c \in \,]a\,;b[$ tel que

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c).$$



6) Liens entre dérivée et variations

Théorème 10

Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I.

1. Si, pour tout $x \in I$, $f'(x) \geqslant 0$ et si $f'(x)$ ne s'annule qu'un nombre fini de fois sur I alors f est strictement croissante sur I.
2. Si, pour tout $x \in I$, $f'(x) \leqslant 0$ et si $f'(x)$ ne s'annule qu'un nombre fini de fois sur I alors f est strictement décroissante sur I.
3. Si, pour tout $x \in I$, $f'(x) = 0$ alors f est constante sur I.

7) Dérivées successives

Dans tout ce qui suit, I désigne un intervalle non réduit à un point.

Définition 11

Si f est dérivable sur I et si f' est elle-même dérivable sur I, on dit que f est deux fois dérivable sur I et la dérivée de f' est appelée la dérivée seconde de f. On la note f'' (lire « f seconde »).

Exemple 12. Déterminer les dérivées secondes des fonctions sin, cos et exp.

Définition 13

De façon plus générale, on peut définir, si elles existent, les dérivées successives de f de la manière suivante :

- $f^{(0)} = f$;
- pour tout $n \in \mathbb{N}$, si $f^{(n)}$ existe et est dérivable sur I, on pose $f^{(n+1)} = (f^{(n)})'$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, si elle existe, $f^{(n)}$ s'appelle la dérivée n-ième de f sur I.

Remarque 14.

1. En particulier, si elles existent, $f^{(1)} = f'$ est la dérivée de f et $f^{(2)} = f''$ est la dérivée seconde de f.
2. Si f est une fonction de la variable x et si f admet une dérivée n-ième alors $f^{(n)}$ peut aussi se noter $\dfrac{\mathrm{d}^n f}{\mathrm{d}x^n}$. Ainsi, en mécanique, si x est la position d'un mobile en fonction du temps, $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$ correspond à la vitesse et $\dfrac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}$ à l'accélération.

Exemple 15. Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la dérivée n-ième des fonctions suivantes sur $\mathbb{R}$:

1. exp **2.** $f : x \longmapsto \mathrm{e}^{2x}$ **3.** $g : x \longmapsto x^k$ $(k \in \mathbb{N})$ **4.** cos

Définition 16

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. On dit que f est de classe $\mathscr{C}^n$ sur I si f admet une dérivée n-ième sur I et si $f^{(n)}$ est continue sur I.
2. On dit que f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur I si f admet une dérivée n-ième sur I pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Remarque 17.

1. Dire que f est de classe $\mathscr{C}^0$ sur I signifie que f est continue sur I et dire que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I signifie que f est dérivable sr I et que f' est continue sur I.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Si f est de classe $\mathscr{C}^n$ sur I alors elle est de classe $\mathscr{C}^k$ sur I pour tout $k \in [\![0, n]\!]$.
3. f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur I si et seulement si elle est de classe $\mathscr{C}^n$ sur I pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Propriété 18

1. Toutes les fonctions de référence sont de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur tout intervalle inclus dans leurs ensembles de dérivabilité.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$. L'ensemble des fonctions de classe $\mathscr{C}^n$ sur I est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{F}(I, \mathbb{R})$ et pour toutes fonctions f et g de classe $\mathscr{C}^n$ sur I et tous réels λ et μ, $(\lambda f + \mu g)^{(n)} = \lambda f^{(n)} + \mu g^{(n)}$.
3. Soit $n \in \mathbb{N}$. Si f et g sont deux fonctions de classe $\mathscr{C}^n$ sur I alors fg est de classe $\mathscr{C}^n$ sur I et, si g ne s'annule pas sur I, $\frac{f}{g}$ est de classe $\mathscr{C}^n$ sur I.
4. Soit $n \in \mathbb{N}$. Si f est une fonction de classe $\mathscr{C}^n$ sur I, si g est une fonction de classe $\mathscr{C}^n$ sur un intervalle J tel que, pour tout $x \in I$, $f(x) \in J$ alors $g \circ f$ est de classe $\mathscr{C}^n$ sur I.

II. — Équivalence de fonctions

Dans toute la suite, a désigne un réel ou $-\infty$ ou $+\infty$ et on dit qu'une fonction f est définie au voisinage de a s'il existe un réel $b \neq a$ tel que $]a\,;b[$ ou $]b\,;a[$ soit inclus dans $\mathcal{D}_f$.

Définition 19

Soit f et g deux fonctions définies au voisinage de a et qui ne s'annulent pas au voisinage de a (sauf, éventuellement, en a). On dit que f est équivalente à g au voisinage de a si

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1.$$

Dans ce cas, on note $f(x) \underset{x \to a}{\sim} g(x)$ ou $f \underset{a}{\sim} g$.

Exemple 20. On considère les fonctions $f : x \longmapsto x^3 + x$ et $g : x \longmapsto x^3 + x^2 + 1$.

1. Les fonctions f et g sont-elles équivalentes au voisinage de $+\infty$?
2. Les fonctions f et g sont-elles équivalentes au voisinage de 0 ?

⚠ Une fonction n'est jamais équivalente à la fonction nulle.

Propriété 21

1. Aux voisinages de $+\infty$ et de $-\infty$, un polynôme non nul est équivalent à son monôme de plus haut degré.
2. Au voisinage de 0, un polynôme non nul est équivalent à son monôme de plus bas degré.
3. Une fonction f converge vers un réel ℓ <u>non nul</u> en a si et seulement si $f(x) \underset{x \to a}{\sim} \ell$.

Exemple 22. Si $f : x \longmapsto 5x^3 - 3x^2 + 7x - 2$ alors $f(x) \underset{x \to +\infty}{\sim} 5x^3$, $f(x) \underset{x \to -\infty}{\sim} 5x^3$ et $f(x) \underset{x \to 0}{\sim} -2$.
Comme $f(x) \underset{x \to 0}{\sim} -2$, $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = -2$.

Propriété 23. — Équivalents usuels au voisinage de 0

$$\mathrm{e}^x - 1 \underset{x\to 0}{\sim} x \qquad \ln(1+x) \underset{x\to 0}{\sim} x \qquad \sin(x) \underset{x\to 0}{\sim} x$$

$$1-\cos(x) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{x^2}{2} \qquad \forall \alpha \in \mathbb{R}^*,\ (1+x)^\alpha - 1 \underset{x\to 0}{\sim} \alpha x.$$

Remarque 24. Comme $\lim\limits_{x\to 0} \mathrm{e}^x = 1 \neq 0$, $\mathrm{e}^x \underset{x\to 0}{\sim} 1$. De même, $\lim\limits_{x\to 0} \cos(x) = 1 \neq 0$ donc $\cos(x) \underset{x\to 0}{\sim} 1$.

Propriété 25

La relation $\underset{a}{\sim}$ est :

- **réflexive** ce qui signifie que, pour toute fonction f qui ne s'annule pas au voisinage de a, $f \underset{a}{\sim} f$;
- **symétrique** ce qui signifie que, pour toutes fonctions f et g qui ne s'annulent pas au voisinage de a, si $f \underset{a}{\sim} g$ alors $g \underset{a}{\sim} f$;
- **transitive** ce qui signifie que, pour toutes fonctions f, g et h qui ne s'annulent pas au voisinage de a, si $f \underset{a}{\sim} g$ et $g \underset{a}{\sim} h$ alors $f \underset{a}{\sim} h$.

Propriété 26

1. Deux fonctions équivalentes en a sont de même signe sur un voisinage de a.

2. Deux fonctions équivalentes en a ont le même comportement (divergente ou convergente) en a. De plus, si l'une admet une limite finie ou infinie en a alors l'autre possède la même limite en a.

Exemple 27.

1. Comme $\mathrm{e}^x - 1 \underset{x\to 0}{\sim} x$, la fonction $x \longmapsto \mathrm{e}^x - 1$ a la même signe que x au voisinage de 0.

2. La limite d'un polynôme en $+\infty$ ou en $-\infty$ est égale à la limite de son monôme de plus haut degré.

Propriété 28

Soit f_1, g_1, f_2 et g_2 des fonctions telles que $f_1 \underset{a}{\sim} g_1$ et $f_2 \underset{a}{\sim} g_2$. Alors,

1. $f_1 f_2 \underset{a}{\sim} g_1 g_2$ (on peut multiplier des équivalents) ;

2. $\dfrac{f_1}{f_2} \underset{a}{\sim} \dfrac{g_1}{g_2}$ (on peut diviser des équivalents) ;

3. Pour toute constante réel α, sous réserve d'existance, $f_1^\alpha \underset{a}{\sim} g_1^\alpha$ (on peut élever des équivalents à une puissance <u>constante</u>).

4. Si (u_n) est une suite telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = a$ alors $f_1(u_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} g_1(u_n)$.

5. Soit b un réel ou $+\infty$ ou $-\infty$. Si u est une fonction telle que $\lim\limits_{x\to b} u(x) = a$ alors $f_1 \circ u \underset{b}{\sim} g_1 \circ u$.

Remarque 29. ATTENTION !!

1. On ne peut pas ajouter ou soustraire des équivalents. Par exemple, $x^2+x \underset{x\to+\infty}{\sim} x^2+1$ et $-x^2 \underset{x\to+\infty}{\sim} -x^2$ mais $(x^2+x)+(-x^2)=x$ n'est pas équivalent en $+\infty$ à $(x^2+1)+(-x^2)=1$.
2. On ne peut pas élever des équivalents à une puissance non constante. Par exemple, $1+\dfrac{1}{x} \underset{x\to+\infty}{\sim} 1$ mais $\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x$ n'est pas équivalent à $1^x=1$. En effet, cela signifierait que $\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x$ tend vers 1 en $+\infty$ donc que $\ln\left(\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x\right)$ tend vers 0. Or, pour tout $x>0$, $\ln\left(\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x\right) = x\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right) \underset{x\to+\infty}{\sim} x\times\dfrac{1}{x}=1$ car $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}=0$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left(\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x\right)=1$.
3. On ne peut pas composer des équivalents par une fonction. Par exemple, $x+1 \underset{x\to+\infty}{\sim} x$ mais e^{x+1} n'est pas équivalent à e^x en $+\infty$ car $\dfrac{\mathrm{e}^{x+1}}{\mathrm{e}^x}=\mathrm{e}^{x+1-x}=e$ ne tend pas vers 1.

Exemple 30. En utilisant des équivalents, déterminer les limites suivantes.

$$\lim_{x\to0}\frac{(\mathrm{e}^{2x}-1)\sin(x)}{x^2}\qquad \lim_{x\to+\infty}(x^3+x+2)\sin\left(\frac{1}{2x^3}\right)\qquad \lim_{x\to0}\frac{(1+x^4)^3-1}{\cos(x^2)-1}.$$

III. — Développements limités

Définition 31

Soit f une fonction définie au voisinage de a et $n\in\mathbb{Z}$. On dit que f est négligeable devant x^n au voisinage de a si

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{x^n}=0.$$

Dans ce cas, on note $f(x)=\underset{x\to a}{o}(x^n)$, ce qui se lit « $f(x)$ est un petit o de x^n au voisinage de a ».

Exemple 32.

1. Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(x)}{x^n}=0$ donc $\ln(x)=\underset{x\to+\infty}{o}(x^n)$.
2. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^5}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}x^3=0$ donc $x^5=\underset{x\to0}{o}(x^2)$.

Propriété 33

Soit n et m deux entiers et $k\in\mathbb{R}^*$.

1. Si $0\leqslant n\leqslant m$ alors $x^m=\underset{x\to0}{o}(x^n)$ et $x^n=\underset{x\to\pm\infty}{o}(x^m)$.
2. $\underset{x\to a}{o}(x^n)\times\underset{x\to a}{o}(x^m)=\underset{x\to a}{o}(x^{n+m})$ et $x^m\times\underset{x\to a}{o}(x^n)=\underset{x\to a}{o}(x^{m+n})$.
3. $\underset{x\to0}{o}(kx^n)=k\underset{x\to0}{o}(x^n)=\underset{x\to0}{o}(x^n)$ et, en particulier, $\underset{x\to a}{o}(x^n)+\underset{x\to a}{o}(x^n)=\underset{x\to a}{o}(x^n)$.

Exemple 34. $x^2+x+\ln(x)=x^2+\underset{x\to+\infty}{o}(x^2)+\underset{x\to+\infty}{o}(x^2)=x^2+\underset{x\to+\infty}{o}(x^2)$.

Propriété 35

Soit f une fonction définie au voisinage de a, $n \in \mathbb{Z}$ et $\lambda \in \mathbb{R}^*$. Alors, $f(x) = \lambda x^n + \underset{x \to a}{o}(x^n)$ si et seulement si $f(x) \underset{x \to a}{\sim} \lambda x^n$.

Propriété 36

Soit f une fonction définie au voisinage de 0 et $n \in \mathbb{N}$. On dit que f admet un développement limité à l'ordre n au voisinage de 0 ($\mathrm{DL}_n(0)$) s'il existe $P \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que

$$f(x) = P(x) + \underset{x \to 0}{o}(x^n).$$

Autrement dit, f admet un $\mathrm{DL}_n(0)$ s'il existe des réels a_0, a_1, ..., a_n tels que

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n + \underset{x \to 0}{o}(x^n).$$

Remarque 37. Dans la suite, sauf mention du contraire, tous les o sont au voisinage de 0 et on écrira simplement $o(x^n)$ plutôt que $\underset{x \to 0}{o}(x^n)$.

Exemple 38. Soit $f : x \longmapsto x^5 + x^3 + x + 2$. Alors, $f(x) = 2 + x + o(x)$ donc f admet un $\mathrm{DL}_1(0)$. De même, $f(x) = 2 + x + x^3 + o(x^4)$ donc f admet un $\mathrm{DL}_4(0)$.

Exemple 39. Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer un $\mathrm{DL}_n(0)$ de $f : x \longmapsto \dfrac{1}{1-x}$.

Propriété 40

Soit $n \in \mathbb{N}$. Si f admet un $\mathrm{DL}_n(0)$ alors celui-ci est unique. Autrement dit, s'il existe des polynômes P et Q dans $\mathbb{R}_n[X]$ tels que $f(x) = P(x) + o(x^n)$ et $f(x) = Q(x) + o(x^n)$ alors $P = Q$.

Propriété 41

Soit f une fonction définie au voisinage de 0.

1. f admet un $\mathrm{DL}_0(0)$ si et seulement si f admet une limite finie ℓ en 0 et alors

$$f(x) = \ell + o(1).$$

2. f admet un $\mathrm{DL}_1(0)$ si et seulement si f est dérivable en 0 et alors

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + o(x).$$

Remarque 42. Si f admet un $\mathrm{DL}_1(0)$ alors celui-ci est $f(x) = f(0) + f'(0)x + o(x)$ et il fait apparaître l'équation de la tangente à $\mathscr{C}_f$ en 0 : $y = f'(0)x + f(0)$. On verra que ceci, associé aux propriétés 35 et 26 permet de déterminer la position relative de la courbe et de la tangente au voisinage de 0.

Propriété 43

Les développements limités étant des égalités, on peut les additionner, les soustraire, les multiplier, faire des substitutions pour obtenir d'autres développements limités.

Exemple 44. Soit $n \in \mathbb{N}$. À partir du résultat de l'exemple 39, déterminer le $\mathrm{DL}_n(0)$ de $x \longmapsto \dfrac{1}{1+x}$ puis en déduire celui de $x \longmapsto \dfrac{1}{1+x^2}$.

Propriété 45

Soit f une fonction définie sur un intervalle I contenant 0 et admettant un $\mathrm{DL}_n(0)$ de la forme

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n + o(x^n).$$

Si F est une primitive de f sur I alors F admet un $\mathrm{DL}_{n+1}(0)$ de la forme

$$F(x) = F(0) + a_0 x + \frac{a_1}{2}x^2 + \cdots + \frac{a_n}{n+1}x^{n+1} + o(x^{n+1}).$$

Corollaire 46

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\ln(1+x) = x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^{n-1}\dfrac{x^n}{n} + o(x^n)$.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\exp(x) = 1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^3}{3!} + \cdots + \dfrac{x^n}{n!} + o(x^n)$.

Exemple 47.

1. Déduire de ce qui précède l'équation de la tangente à la courbe de la fonction exp en 0 et donner les positions relatives de la courbe et de cette tangente au voisinage de 0.
2. Déterminer un $\mathrm{DL}_3(0)$ de la fonction $x \longmapsto \dfrac{\mathrm{e}^x}{x-1}$.
3. Déterminer un $\mathrm{DL}_3(0)$ de la fonction $x \longmapsto 3\mathrm{e}^x - 2\ln(1+x)$.

Théorème 48. — Formule de Taylor-Young

Soit $n \in \mathbb{N}$ et f une fonction de classe $\mathscr{C}^n$ sur un intervalle I contenant 0. Alors, f admet un $\mathrm{DL}_n(0)$ donné par

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{3!}x^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + o(x^n).$$

Exemple 49. Déterminer le $\mathrm{DL}_2(0)$ de la fonction $f : x \longmapsto \dfrac{1}{2+\mathrm{e}^x}$.

Remarque 50. La dérivée d'une fonction paire étant impaire et la dérivée d'une fonction impaire étant paire, la formule de Taylor-Young implique qu'un développement limité en 0 d'une fonction paire ne contient que des puissances paires et le développement limité d'une fonction impaire ne contient que des puissances impaires.

Corollaire 51 : DL usuels à connaître

- $\dfrac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + o\left(x^n\right)$
- $\dfrac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + \cdots + (-1)^n x^n + o\left(x^n\right)$
- $e^x = 1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^3}{3!} + \cdots + \dfrac{x^n}{n!} + o\left(x^n\right)$
- $\cos(x) = 1 - \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^n \dfrac{x^{2n}}{(2n)!} + o\left(x^{2n}\right)$
- $\sin(x) = x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^n \dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o\left(x^{2n+1}\right)$
- $\ln(1+x) = x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^{n-1} \dfrac{x^n}{n} + o\left(x^n\right)$
- $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, $(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \dfrac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \cdots + \dfrac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} x^n + o\left(x^n\right)$

Exemple 52.

1. Déterminer le $\mathrm{DL}_3(0)$ de $x \longmapsto \cos(x) + \sin(x)$
2. Déterminer le $\mathrm{DL}_2(0)$ de $x \longmapsto \cos(x)\sqrt{1+x}$
3. Déterminer le $\mathrm{DL}_3(0)$ de $x \longmapsto \dfrac{\sin(x^2)}{1-x}$
4. Déterminer le $\mathrm{DL}_3(0)$ de $x \longmapsto \ln\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)$;
5. Déterminer la limite en 0 de $x \longmapsto \dfrac{1+x-e^x}{1-\cos(x)}$.

Définition 53

Soit $n \in \mathbb{N}$.

1. Soit a un réel quelconque et f une fonction définie au voisinage de a. On dit que f admet un développement limité à l'ordre n au voisinage de a ($\mathrm{DL}_n(a)$) si la fonction $g : h \longmapsto f(a+h)$ admet un $\mathrm{DL}_n(0)$. Le $\mathrm{DL}_n(a)$ de f est alors le $\mathrm{DL}_n(0)$ de g appliqué en $h = x - a$.
2. Ici, a désigne $+\infty$ ou $-\infty$ et f une fonction définie au voisinage de a. On dit que f admet un développement limité à l'ordre n au voisinage de a ($\mathrm{DL}_n(a)$) si la fonction $g : t \longmapsto f\left(\dfrac{1}{t}\right)$ admet un $\mathrm{DL}_n(0)$. Le $\mathrm{DL}_n(a)$ de f est alors le $\mathrm{DL}_n(0)$ de g appliqué en $t = \dfrac{1}{x}$.

Exemple 54.

1. Déterminer le $\mathrm{DL}_3(1)$ de la fonction exponentielle.
2. Déterminer le $\mathrm{DL}_3(2)$ de la fonction inverse.
3. Déterminer le $\mathrm{DL}_3(+\infty)$ de la fonction $x \longmapsto \dfrac{1}{1+x}$.
4. Déterminer le $\mathrm{DL}_3(+\infty)$ de la fonction $f : x \longmapsto \frac{1}{x}e^{\frac{1}{x}}$

IV. — Exercices

Exercice 1. Dresser le tableau de variation sur $\mathbb{R}$ des fonctions suivantes.

1. $f : x \longmapsto (x^2 - 2x + 3)^5$

2. $g : x \longmapsto \dfrac{x}{1+x^2}$

Exercice 2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer la dérivée n-ième de la fonction $f : x \longmapsto x\exp(x)$.

Indication. On pourra calculer les dérivées première, seconde et troisième, conjecturer une expression générale puis démontrer cette conjecture par récurrence.

Exercice 3. Déterminer un équivalent de f au voisinage de a.

1. $f : x \longmapsto x^3 - x + 2$ et $a = +\infty$

2. $f : x \longmapsto \mathrm{e}^x + x^2$ et $a = +\infty$

3. $f : x \longmapsto x^4 + 3x$ et $a = 0$

4. $f : x \longmapsto \dfrac{5x^2 + 3x - 2}{x+1}$ et $a = +\infty$

5. $f : x \longmapsto \dfrac{x^2 + x}{x^5 + x^3}$ et $a = 0$

6. $f : x \longmapsto \dfrac{\ln(1+x^2)}{2x+1}$ et $a = 0$

Exercice 4.

1. Déterminer un équivalent en 0 dans chacun des cas suivants et en déduire la limite en 0.

a. $f(x) = \dfrac{\sqrt{1-x^2} - 1}{x}$ **b.** $f(x) = \dfrac{(1-\mathrm{e}^x)\sin x}{x^2 + x^3}$ **c.** $f(x) = \dfrac{(\cos x - 1)\sin^3 x}{3x^4}$

2. Déterminer un équivalent en $+\infty$ dans chacun des cas et en déduire la limite en $+\infty$.

a. $f(x) = \sqrt{x^2 + x} - x$ **b.** $f(x) = x\ln(1+x^2) - 2x\ln(x)$ **c.** $f(x) = x^2 \sin\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right)$

Pour **b.**, utiliser une propriété du logarithme pour simplifier l'expression.

Exercice 5. Déterminer l'ensemble de définition de chaque fonction et faire l'étude aux bornes.

$$f : x \longmapsto \sqrt{x^2+1} + \sqrt{x^2-1} \qquad g : x \longmapsto x^2 \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) \qquad h : x \longmapsto \frac{x}{1+\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}.$$

Exercice 6. Dans chaque cas, déterminer les limites de f aux bornes de $\mathcal{D}_f$.

1. $f(x) = (x+2)\,\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$ **2.** $f(x) = \dfrac{(x-2)^2}{x(1-x)}$ **3.** $f(x) = \sqrt{\dfrac{x^3-1}{x}}$ **4.** $f(x) = \dfrac{(x+1)^3(x-3)}{x^2(x-2)}$

Exercice 7. Déterminer le développement limité de f à l'ordre indiqué en 0.

1. $f : x \longmapsto x^4 + x + 1$ à l'ordre 2.

2. $f : x \longmapsto \dfrac{1}{1-x} - \mathrm{e}^x$ à l'ordre 3.

3. $f : x \longmapsto \sin(x)\cos(2x)$ à l'ordre 3.

4. $f : x \longmapsto \sqrt{1-x} + \sqrt{1+x}$ à l'ordre 3. ;

5. $f : x \longmapsto \cos(x)\ln(1+x)$ à l'ordre 3.

6. $f : x \longmapsto (\ln(1+x))^2$ à l'ordre 3.

7. $f : x \longmapsto \dfrac{\sin(x) - 1}{\cos(x) + 1}$ à l'ordre 2.

8. $f : x \longmapsto \dfrac{\ln(1+x)}{\sin(x)}$ à l'ordre 2.

Exercice 8.

1. Écrire le $\mathrm{DL}_3(0)$ de $x \longmapsto \dfrac{1}{1-x}$.

2. En déduire le $\mathrm{DL}_3(0)$ de $x \longmapsto \dfrac{1}{2-x}$

3. En déduire le $\mathrm{DL}_3(0)$ de $x \longmapsto \dfrac{1}{x^2 - 3x + 2}$.

Exercice 9.

1. Calculer le $\mathrm{DL}_3(0)$ de $f : x \longmapsto \ln(1+x) + 2\mathrm{e}^x$
2. Calculer le $\mathrm{DL}_3(0)$ de $f : x \longmapsto \ln(1-x^2)$
3. Calculer le $\mathrm{DL}_3(0)$ de $f : x \longmapsto \dfrac{\ln(1+x)}{1-x}$

Exercice 10. Déterminer le développement limité à l'ordre 3 en 0 de :

1. $f : x \longmapsto \ln\left(\dfrac{x^2+1}{x+1}\right)$ **2.** $f : x \longmapsto \ln(1+\sin(x))$ **3.** $f : x \longmapsto \ln(1+\mathrm{e}^x)$

4. $f : x \longmapsto \sqrt{3+\cos(x)}$ **5.** $f : x \longmapsto \mathrm{e}^{\sqrt{1+x}}$ **6.** $f : x \longmapsto \ln\left(1+\sqrt{1+x}\right)$

7. $f : x \longmapsto \ln(3\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x})$ **8.** $f : x \longmapsto \dfrac{\ln(1+x)}{\mathrm{e}^x - 1}$ **9.** $f : x \longmapsto \dfrac{x-\sin(x)}{1-\cos(x)}$

Exercice 11. On cherche à calculer la limite de $f : x \longmapsto \dfrac{x+\cos(x)-\mathrm{e}^x}{\ln(1+x)-\sin(x)}$ en 0.

1. **a.** Déterminer $\lim\limits_{x\to 0}(x+\cos(x)-\mathrm{e}^x)$.
   b. Déterminer $\lim\limits_{x\to 0}(\ln(1+x)-\sin(x))$.
   c. Peut-on répondre à la question posée ? Pourquoi ?
2. Montrer que $x+\cos(x)-\mathrm{e}^x = -x^2 + \underset{x\to 0}{o}(x^2)$.
3. Montrer que $\ln(1+x)-\sin(x) = -\dfrac{x^2}{2} + \underset{x\to 0}{o}(x^2)$.
4. En déduire que $f(x) = \dfrac{-1+\underset{x\to 0}{o}(1)}{-\frac{1}{2}+\underset{x\to 0}{o}(1)}$.
5. Lorsqu'on fait tendre x vers 0, que peut-on dire, par définition, de $\underset{x\to 0}{o}(1)$?
6. En déduire la limité cherchée.

Exercice 12. On cherche à calculer la limite de $f : x \longmapsto \dfrac{x^5}{\ln(1+x^2)-x\sin(x)}$ en 0.

1. **a.** Déterminer $\lim\limits_{x\to 0} x^5$.
   b. Déterminer $\lim\limits_{x\to 0} \ln(1+x^2)-x\sin(x)$.
   c. Peut-on répondre à la question posée ? Pourquoi ?
2. Montrer que $\ln(1+x^2)-x\sin(x) = -\dfrac{x^4}{3} + \underset{x\to 0}{o}(x^5)$.
3. En déduire que $f(x) = \dfrac{x}{-\frac{1}{3}+\underset{x\to 0}{o}(x)}$.
4. En déduire la limité cherchée.

Exercice 13. En utilisant les développements limités, déterminer les limites suivantes.

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos(x)-1}{x^2}$ **2.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(x)-x}{x^3}$ **3.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{e}^x-1-x}{x^2}$ **4.** $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\sqrt{1+t}-1-\frac{t}{2}}{t^2}$

5. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)-x}{x^2}$ **6.** $\lim\limits_{u\to 0}\dfrac{\ln(1-u)+u}{u}$ **7.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^{\frac{1}{3}}-1-\frac{x}{3}}{x^2}$

Exercice 14. Déterminer les limites suivantes en utilisant des développements limités.

1. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln(x)-x+1}{(x-1)^2}$ **2.** $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\sqrt{x+2}-\frac{3}{2}-\frac{x}{2}}{(x+1)^2}$ **3.** $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\exp(x-2)+1-x}{(x-2)^2}$

Exercice 15. Soit f la fonction définie sur $]-1\,;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{\ln(1+x)-x}{x^2}$.

1. Montrer que f peut être prolongée par continuité en 0 et que ce prolongement est dérivable en 0. On note encore f ce prolongement.
2. Quelle est alors la position relative de la courbe de f par rapport à sa tangente au voisinage de 0 ?

Exercice 16. Montrer que la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \dfrac{x}{\mathrm{e}^x - 1}$ peut être prolongée en une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 17. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{1}{1+\mathrm{e}^x}$.

1. Déterminer le $\mathrm{DL}_3(0)$ de f
2. En déduire une équation de la tangente $\mathcal{T}$ à la courbe de f au point d'abscisse 0.
3. Étudier la position relative de la courbe de f et de $\mathcal{T}$ au voisinage de 0

Exercice 18. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = \ln(x^2+2x+2)$.

1. Démontrer que f est bien définie sur $\mathbb{R}$.
2. **a.** Montrer que, pour tout réel x, $f(x) = \ln(2) + \ln\left(1 + x + \dfrac{x^2}{2}\right)$.
   b. En déduire le $\mathrm{DL}_3(0)$ de f.
3. Déterminer une équation de la tangente à la courbe représentative de f en 0 et montrer que la courbe traverse sa tangente.

Exercice 19. On se propose de calculer un $\mathrm{DL}_3(0)$ de la fonction tangente de deux manières différentes.

1. **Première méthode**
   Calculer le $\mathrm{DL}_3(0)$ de $x \longmapsto \dfrac{1}{\cos(x)}$ et en déduire un $\mathrm{DL}_3(0)$ de tan.
2. **Seconde méthode**
   a. Vérifier que, pour tout $x \in \left]-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}\right[$, $\tan'(x) = 1 + \tan^2(x)$.
   b. Déterminer $\mathrm{DL}_1(0)$ de tan.
   c. En déduire le $\mathrm{DL}_2(0)$ de $x \longmapsto 1 + \tan^2(x)$.
   d. En utilisant la question **2.a.**, en déduire le $\mathrm{DL}_3(0)$ de tan.
   e. En appliquant à nouveau la même méthode, en déduire le $\mathrm{DL}_5(0)$ de tan.

Exercice 20. Montrer que la fonction $x \longmapsto x\mathrm{e}^{x^2}$ réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ puis donner un développement limité à l'ordre 5 de f^{-1} en 0.

Exercice 21. Soit $n \in \mathbb{N}$. En calculant de deux façons différentes le développement limité à l'ordre n de $x \longmapsto (\mathrm{e}^x - 1)^n$, calculer, pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $\displaystyle\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} \frac{(-1)^{n-j} j^k}{k!}$.