⧫ Chapitre 4. Généralités sur les probabilités

I. — Probabilité sur un ensemble quelconque

1) Expériences aléatoires

Définition 1

Une **expérience aléatoire** (ou épreuve) est une expérience qui possède les 3 propriétés suivantes :

- l'ensemble des résultats possibles de l'expérience est connu *a priori* ;
- on peut répéter l'expérience dans les mêmes conditions ;
- le résultat d'une réalisation de l'expérience est le fruit du hasard.

L'ensemble des résultats (ou issues) possibles d'une expérience aléatoire est appelé l'**univers** de cette expérience. On le note, en général, Ω.

Exemple 2.

1. Lancer une pièce est une expérience aléatoire et son univers est $\Omega = \{pile, face\}$.

2. Lancer un dé cubique est une expérience aléatoire et son univers est $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

3. Lancer une pièce indéfiniment est une expérience aléatoire et son univers est l'ensemble de toutes les suites de la forme $(pile, face, face, face, pile, ...)$.

4. Choisir un nombre réel entre 0 et 1 compris est une expérience aléatoire et son univers est $[0\,;1]$.

Remarque 3. Contrairement à ce qui a été vu en première année, on considère ici des univers qui peuvent être finis ou infinis.

2) Évènements

Dans tout ce paragraphe, on considère une expérience aléatoire et on note Ω son univers. En première année, les évènements ont été définis comme les éléments de $\mathcal{P}(\Omega)$, c'est-à-dire toutes les parties de l'univers.

Dans le cas où l'univers est infini, il n'est pas toujours possible de donner un sens à la notion de probabilité sur $\mathcal{P}(\Omega)$. On admettra cependant qu'il existe un ensemble de parties $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ sur lequel cela est possible.

Définition 4

Un **évènement** est un élément de l'ensemble $\mathcal{A}$.
Si A est un évènement et si $a \in A$, on dit que l'issue a **réalise** l'évènement A.

Remarque 5. Cette vision est la vision moderne des évènements comme étant des parties de l'univers. Cependant, historiquement, les évènements ont d'abord été définis à l'aide de phrases les décrivant. On a gardé aujourd'hui cette double vision et il faut savoir passer de l'une à l'autre.

Définition 6

1. L'ensemble $\varnothing$ est un évènement appelé l'**évènement impossible**. Il n'est réalisé par aucune issue de l'expérience.
2. L'ensemble Ω est un évènement appelé l'**évènement certain**. Il est réalisé par toutes les issues de l'expérience.

Définition 7

Soit A et B deux évènements de Ω. Alors,

1. $A \cup B$ est un évènement qui est réalisé si (au moins) l'un des deux évènements A ou B est réalisé.
2. $A \cap B$ est un évènement qui est réalisé si les deux évènements A et B sont réalisés (simultanément).
3. $\overline{A} = \Omega \setminus A$ est un évènement qui est réalisé si A ne l'est pas.

Exemple 8. On lance indéfiniment un dé cubique et on note, à chaque lancer, le résultat obtenu.

1. Quel est l'univers de cette expérience ?
2. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on note A_k l'évènement « Obtenir un 6 au k-ième lancer ». Exprimer les évènements suivants en fonction des évènements A_k ($k \in \mathbb{N}^*$) :
   a. B : « Obtenir un 6 lors du 5ième et du 10ième lancers »
   b. C : « Ne pas obtenir un 6 au 4ième lancer »
   c. D : « Obtenir au moins un 6 lors des deux premiers lancers ».

Solution.

1. L'univers de l'expérience est l'ensemble des suites indexés par $\mathbb{N}^*$ et à valeurs dans $[\![1, 6]\!]$ i.e. $\Omega = [\![1, 6]\!]^{\mathbb{N}^*}$.
2. **a.** $B = A_5 \cap A_{10}$.
   b. $C = \overline{A_4}$.
   c. $D = A_1 \cup A_2$.

Remarque 9. De façon plus générale, si $(A_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ est une suite d'évènements, on peut définir les ensembles suivants dont on admet que ce sont des évènements :

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \{\omega \in \Omega \mid \exists p \in [\![1, n]\!],\ \omega \in A_p\}$. Ainsi, $\displaystyle\bigcup_{i=1}^{n} A_i$ est réalisé si et seulement s'il existe $p \in [\![1, n]\!]$ tel que A_p soit réalisé.
2. $\displaystyle\bigcup_{i=1}^{+\infty} A_i = \{\omega \in \Omega \mid \exists p \in \mathbb{N}^*,\ \omega \in A_p\}$. Ainsi, $\displaystyle\bigcup_{i=1}^{+\infty} A_i$ est réalisé si et seulement s'il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que A_p soit réalisé.
3. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\bigcap_{i=1}^{n} A_i = \{\omega \in \Omega \mid \forall i \in [\![1, n]\!],\ \omega \in A_i\}$. Ainsi, $\displaystyle\bigcap_{i=1}^{n} A_i$ est réalisé si et seulement si, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, A_i est réalisé.
4. $\displaystyle\bigcap_{i=1}^{+\infty} A_i = \{\omega \in \Omega \mid \forall i \in \mathbb{N}^*,\ \omega \in A_p\}$. Ainsi, $\displaystyle\bigcap_{i=1}^{+\infty} A_i$ est réalisé si et seulement si, pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, A_i est réalisé.

Exemple 10. En reprenant l'énoncé de l'exemple 8, exprimer les évènements suivants en fonction des évènements A_k ($k \in \mathbb{N}^*$) :

1. B : « Obtenir un 6 lors de chacun des 5 premiers lancers »
2. C : « Obtenir un 6 pour la première fois au 4ième lancer »
3. D : « Obtenir exactement un 6 lors des 3 premiers lancers »
4. E : « Ne jamais obtenir 6 »
5. F : « N'obtenir que des 6 »
6. G : « N'obtenir aucun 6 à partir du 20ième lancer »
7. H : « Obtenir au moins un 6 à partir du 30ième lancer »
8. K : « N'obtenir que des 6 à partir d'un certain lancer »

Solution.

1. $B = \bigcap_{i=1}^{5} A_i$.
2. $C = \overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3} \cap A_4 = \left(\bigcap_{i=1}^{3} \overline{A_i}\right) \cap A_4$.
3. $D = \left(A_1 \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3}\right) \cup \left(\overline{A_1} \cap A_2 \cap \overline{A_3}\right) \cup \left(\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap A_3\right)$.
4. $E = \bigcap_{i=1}^{+\infty} \overline{A_i}$.
5. $F = \bigcap_{i=1}^{+\infty} A_i$.
6. $G = \bigcap_{i=20}^{+\infty} \overline{A_i}$.
7. $H = \bigcup_{i=30}^{+\infty} A_i$.
8. $K = \bigcup_{n=1}^{+\infty} \left(\bigcap_{i=n}^{+\infty} A_i\right)$.

Notation 11.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $I = [\![1, n]\!]$. On note $\bigcup_{i \in I} A_i = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$ et $\bigcap_{i \in I} A_i = \bigcap_{i=1}^{n} A_i$.
2. On note $\bigcup_{i \in \mathbb{N}^*} A_i = \bigcup_{i=1}^{+\infty} A_i$ et $\bigcap_{i \in \mathbb{N}^*} A_i = \bigcap_{i=1}^{+\infty} A_i$.

Propriété 12. — Lois de de Morgan

Soit $(A_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ une suite d'évènements. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Si $I = [\![1, n]\!]$ ou $I = \mathbb{N}^*$ alors

$$\overline{\bigcup_{i \in I} A_i} = \bigcap_{i \in I} \overline{A_i} \qquad \text{et} \qquad \overline{\bigcap_{i \in I} A_i} = \bigcup_{i \in I} \overline{A_i}.$$

Démonstration. Pour tout $\omega \in \Omega$,

$$\omega \in \overline{\bigcup_{i\in I} A_i} \Longleftrightarrow \omega \notin \bigcup_{i\in I} A_i \Longleftrightarrow \forall i \in I,\ \omega \notin A_i \Longleftrightarrow \forall i \in I,\ \omega \in \overline{A_i} \Longleftrightarrow \omega \in \bigcap_{i\in I} \overline{A_i}$$

donc $\overline{\bigcup_{i\in I} A_i} = \bigcap_{i\in I} \overline{A_i}$.

En appliquant ceci à la famille $(\overline{A_i})_{i\in I}$, on en déduit que $\overline{\bigcup_{i\in I} \overline{A_i}} = \bigcap_{i\in I} \overline{\overline{A_i}} = \bigcap_{i\in I} A_i$ et donc $\overline{\bigcap_{i\in I} A_i} = \overline{\overline{\bigcup_{i\in I} \overline{A_i}}} = \bigcup_{i\in I} \overline{A_i}$. □

Définition 13

1. On dit que deux évènements A et B sont **incompatibles** (ou disjoints) si $A \cap B = \varnothing$.
2. On suppose que $I = [\![1, n]\!]$ ou $I = \mathbb{N}^*$. Si $(A_i)_{i\in\ I}$ est une suite (finie ou infinie) d'évènements, on dit que ces évènements sont **deux à deux incompatibles** si, pour tout $(i\,;j) \in I^2$ tel que $i \neq j$, A_i et A_j sont incompatibles.

Exemple 14.

1. On lance trois fois de suite une pièce équilibrée. Les évènements A : « Obtenir au moins une fois *face* » et $\overline{A}$: « N'obtenir que des *pile* » sont incompatibles.
   Les évènements C_1 ; « Obtenir pile pour la première fois au premier lancer », C_2 : « Obtenir pile pour la première fois au deuxième lancer » et C_3 : « Obtenir pile pour la première fois au troisième lancer » sont deux à deux incompatibles.
2. De manière générale, pour tout évènement A, les évènements A et $\overline{A}$ sont incompatibles.
3. Dans l'exemple 8, les évènements A_k pour $k \in \mathbb{N}^*$, ne sont pas deux à deux incompatibles car $A_1 \cap A_2 \neq \varnothing$ puisqu'on peut obtenir 6 au premier et au second lancers.

Définition 15

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $I = [\![1, n]\!]$ ou $I = \mathbb{N}^*$. On dit que les évènements d'une suite (finie ou infine) d'évènements $(A_i)_{i\in I}$ forment un **système complet d'évènements** si

1. les évènements de la suite $(A_i)_{i\in I}$ sont deux à deux incompatibles.
2. $\bigcup_{i\in I} A_i = \Omega$.

Exemple 16.

1. Dans l'exemple 14, les évènements C_1, C_2 et C_3 forment-ils un système complet d'évènements ?
2. Déterminer un système complet d'évènements pour l'expérience consistant à lancer une infinité de fois un dé cubique.

Solution.

1. Les évènements C_1, C_2 et C_3 sont bien deux à deux incompatibles mais toute issue réalisant $C_1 \cup C_2 \cup C_3$ contient au moins un *pile* donc $(face, face, face) \notin C_1 \cup C_2 \cup C_3$. Ainsi, $C_1 \cup C_2 \cup C_3 \neq \Omega$ donc C_1, C_2 et C_3 ne forment pas un système complet d'évènements.
2. Si on considère A : « N'obtenir que des nombres pairs » et $\overline{A}$: « Obtenir au moins un nombre impair » alors A et $\overline{A}$ forment un système complet d'évènements.
   Si on note, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, B_n : « Obtenir 6 pour la premier fois au n-ième lancer » et B_0 : « Ne jamais obtenir 6 » alors $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est un système complet d'évènements.

II. — Probabilité sur un univers quelconque

1) Définition

Définition 17

Soit Ω un univers et $\mathcal{A}$ un ensemble d'évènements associé. Une **loi de probabilité** (ou simplement une **probabilité**) sur Ω est une fonction $\mathbf{P} : \mathcal{A} \to [0\,;1]$ telle que :

1. $\mathbf{P}(\Omega) = 1$;
2. pour toute suite $(A_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ d'évènements deux à deux incompatibles,

$$\mathbf{P}\left(\bigcup_{i=1}^{+\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{+\infty} \mathbf{P}(A_i).$$

Le triplet $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ est alors appelé un **espace probabilisé** et, si A est un évènement, le réel $\mathbf{P}(A)$ est appelé la **probabilité** de A.

Remarque 18.

1. Le mot « probabilité » désigne, selon cas, une fonction de $\mathcal{A}$ dans $\mathbb{R}$ ou un nombre réel.
2. Par définition, la probabilité de n'importe quel évènement est un nombre compris entre 0 et 1. Quand on calcule des probabilités, il est donc nécessaire de toujours s'assurer que les résultats obtenus sont des réels compris entre 0 et 1.

Définition 19

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ un espace probabilisé et A un évènement.

1. On dit que A est **négligeable** si $\mathbf{P}(A) = 0$.
2. On dit que A est **presque sûr** si $\mathbf{P}(A) = 1$.

2) Propriétés

Propriété 20

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ un espace probabilisé et A et B deux évènements.

1. $\mathbf{P}(\varnothing) = 0$.
2. Si $A \subset B$ alors $\mathbf{P}(A) \leqslant \mathbf{P}(B)$ et $\mathbf{P}(B \setminus A) = \mathbf{P}(B) - \mathbf{P}(A)$.
3. $\mathbf{P}(\overline{A}) = 1 - \mathbf{P}(A)$.
4. $\mathbf{P}(A \cup B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B) - \mathbf{P}(A \cap B)$.

Démonstration.

1. Considérons la famille $(A_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ telle que, pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, $A_i = \varnothing$. Alors, pour tout $(i,j) \in I^2$, $A_i \cap A_j = \varnothing \cap \varnothing = \varnothing$ donc $(A_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ est une famille d'évènements deux à deux incompatibles. On en déduit que $\sum_{i=1}^{+\infty} \mathbf{P}(\varnothing) = \mathbf{P}(\varnothing)$ donc, en particulier, la série $\sum \mathbf{P}(\varnothing)$ converge. Dès lors, la suite $(\mathbf{P}(\varnothing))$ converge vers 0. Or, cette suite est constante égale à $\mathbf{P}(\varnothing)$ donc $\mathbf{P}(\varnothing) = 0$.

Remarque. Ceci implique que si E et F sont deux évènements incompatibles alors $\mathbf{P}(E \cap F) = \mathbf{P}(E) + \mathbf{P}(F)$ en prenant $A_1 = E$, $A_2 = F$ et, pour tout entier $i \geqslant 2$, $A_i = \varnothing$. Ceci se généralise également à n évènements deux à deux incompatibles.

2. Supposons que $A \subset B$. Alors, B est la réunion des deux évènements incompatibles A et $B \setminus A$ donc $\mathbf{P}(B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B \setminus A)$. Comme $\mathbf{P}(B \setminus A) \geqslant 0$, on en déduit que $\mathbf{P}(B) \geqslant \mathbf{P}(A)$ et, de plus, on en déduit également que $\mathbf{P}(B \setminus A) = \mathbf{P}(B) - \mathbf{P}(A)$.

3. En appliquant ce qui précède aux évènements Ω et A, on en déduit que $\mathbf{P}(\Omega \setminus A) = \mathbf{P}(\Omega) - \mathbf{P}(A)$ i.e. $\mathbf{P}(\overline{A}) = 1 - \mathbf{P}(A)$.

4. On peut remarquer que $(A \cup B) \setminus A = B \setminus (A \cap B)$ donc $\mathbf{P}((A \cup B) \setminus A) = \mathbf{P}(B \setminus (A \cap B))$. Or, comme $A \subset A \cup B$ et $A \cap B \subset B$, $\mathbf{P}((A \cup B) \setminus A) = \mathbf{P}(A \cup B) - \mathbf{P}(A)$ et $\mathbf{P}(B \setminus (A \cap B)) = \mathbf{P}(B) - \mathbf{P}(A \cap B)$. On en déduit que $\mathbf{P}(A \cup B) - \mathbf{P}(A) = \mathbf{P}(B) - \mathbf{P}(A \cap B)$ donc $\mathbf{P}(A \cup B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B) - \mathbf{P}(A \cap B)$.

□

Remarque 21.

1. Si Ω est infini, les singletons ne sont pas forcément des évènements et on ne peut pas définir la probabilité $\mathbf{P}$ en donnant seulement l'image des singletons. On admettra que c'est cependant le cas si Ω est inclus dans $\mathbb{N}$, que dans ce cas, on peut prendre $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$ et que si $\Omega = (\omega_n)_{n \in \mathbb{N}}$ alors, pour montrer que $\mathbf{P}$ est une probabilité, il suffit de montrer que la série $\sum \mathbf{P}(\omega_n)$ converge et que sa somme est égale à 1.

2. La notion d'équiprobabilité n'a plus forcément de sens dans le cas où Ω est infini.

Exemple 22.

1. Montrer qu'on définit une probabilité sur $\mathbb{N}$ en posant, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbf{P}(\{n\}) = \dfrac{1}{2^{n+1}}$.

2. Calculer les probabilités de $A = [\![1, 4]\!]$, $B = \{2k \mid k \in \mathbb{N}\}$ et $C = \{2k+1 \mid k \in \mathbb{N}\}$.

Solution.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbf{P}(\{n\}) = \dfrac{1}{2} \times \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$ et, comme $0 \leqslant \dfrac{1}{2} < 1$, la série géométrique $\sum \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$ converge. Ainsi, $\sum \mathbf{P}(\{n\})$ converge et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbf{P}(\{n\}) = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{2} \times \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{\frac{1}{2}} = 1.$$

Ainsi, on définit bien une probabilité $\mathbf{P}$ sur $\mathbb{N}$ en posant, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbf{P}(\{n\}) = \dfrac{1}{2^{n+1}}$.

2. $A = \{1\} \cup \{2\} \cup \{3\} \cup \{4\}$ et les évènements de cette union sont deux à deux disjoints donc

$$\mathbf{P}(A) = \sum_{n=1}^{4} \mathbf{P}(\{n\}) = \sum_{n=1}^{4} \frac{1}{2^{n+1}} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{4} \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1 - (\frac{1}{2})^4}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \times \left(1 - \frac{1}{16}\right) = \frac{15}{32}.$$

De même,

$$\mathbf{P}(B) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbf{P}(\{2k\}) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{2k+1}} = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^k = \frac{1}{2} \times \frac{1}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{2}{3}$$

et

$$\mathbf{P}(C) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbf{P}(\{2k+1\}) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{2k+1+1}} = \frac{1}{4} \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^k = \frac{1}{4} \times \frac{1}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{1}{3}.$$

On aurait peut remarquer que $C = \overline{B}$ donc $\mathbf{P}(C) = 1 - \mathbf{P}(B) = \dfrac{1}{3}$.

III. — Probabilité conditionnelle

Dans toute la suite, on considère un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$.

1) Définition

Définition 23

Soit A un évènement de probabilité non nulle et soit B un évènement quelconque. On définit la **probabilité de B sachant A**, notée $\mathbf{P}(B \mid A)$ ou $\mathbf{P}_A(B)$, par

$$\mathbf{P}(B \mid A) = \mathbf{P}_A(B) = \frac{\mathbf{P}(A \cap B)}{\mathbf{P}(A)}.$$

Exemple 24.

1. On lance un dé cubique équilibré dont les faces sont numérotées de 1 à 6. Quelle est la probabilité que le chiffre obtenu soit 6 sachant que ce chiffre est pair ?
2. En reprenant la situation de l'exemple 22, déterminer la probabilité de B sachant $\overline{A}$.

Solution.

1. L'univers est $\Omega = [\![1, 6]\!]$ et on modélise l'expérience par l'équiprobabilité $\mathbf{P}$. On considère $A = \{2, 4, 6\}$ et $B = \{6\}$. Alors, $A \cap B = \{6\}$ donc la probabilité d'obtenir 6 sachant qu'on a obtenu un chiffre pair est

$$\mathbf{P}(B \mid A) = \frac{\mathbf{P}(\{6\})}{\mathbf{P}(A)} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{3}{6}} = \frac{1}{3}.$$

2. Étant donné que $A = [\![1, 4]\!]$, $\overline{A} = \{0\} \cup \{n \in \mathbb{N} \mid n \geqslant 5\}$ et on en déduit donc que $B \cap \overline{A} = \{0\} \cup \{2k \mid k \in \mathbb{N} \text{ et } k \geqslant 3\}$.
Dès lors,

$$\mathbf{P}(B \cap \overline{A}) = \mathbf{P}(B \setminus \{2, 4\}) = \mathbf{P}(B) - \mathbf{P}(\{2, 4\}) = \frac{2}{3} - \left(\frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^5}\right) = \frac{2}{3} - \frac{5}{32} = \frac{49}{96}$$

donc

$$\mathbf{P}(B \mid \overline{A}) = \frac{\mathbf{P}(B \cap \overline{A})}{\mathbf{P}(\overline{A})} = \frac{\frac{49}{96}}{1 - \frac{15}{32}} = \frac{49}{96} \times \frac{32}{17} = \frac{49}{51}$$

Propriété 25

Soit A et B deux évènements.

1. Si $\mathbf{P}(A) \neq 0$ alors $\mathbf{P}(A \cap B) = \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B \mid A)$.
2. Si $\mathbf{P}(B) \neq 0$ alors $\mathbf{P}(A \cap B) = \mathbf{P}(B)\mathbf{P}(A \mid B)$.
3. Si $\mathbf{P}(A) \neq 0$ et $\mathbf{P}(B) \neq 0$ alors $\mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B \mid A) = \mathbf{P}(B)\mathbf{P}(A \mid B)$.

Démonstration.

1. Supposons que $\mathbf{P}(A) \neq 0$. Alors, par définition, $\mathbf{P}(B \mid A) = \dfrac{\mathbf{P}(A \cap B)}{\mathbf{P}(A)}$ donc, en multipliant par $\mathbf{P}(A)$, on obtient $\mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B \mid A) = \mathbf{P}(A \cap B)$.

2. Supposons que $\mathbf{P}(B) \neq 0$. Alors, par définition, $\mathbf{P}(A \mid B) = \dfrac{\mathbf{P}(A \cap B)}{\mathbf{P}(B)}$ donc, en multipliant par $\mathbf{P}(B)$, on obtient $\mathbf{P}(B)\mathbf{P}(A \mid B) = \mathbf{P}(A \cap B)$.
3. Supposons que $\mathbf{P}(A) \neq 0$ et $\mathbf{P}(B) \neq 0$. Alors, d'après les 2 points précédents,

$$\mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B \mid A) = \mathbf{P}(A \cap B) = \mathbf{P}(B)\mathbf{P}(A \mid B).$$

□

Exemple 26. On considère une urne qui contient des boules numérotées.

On sait que $\frac{3}{4}$ des boules sont rouges et que $\frac{1}{3}$ des boules rouges portent un numéro pair. On tire une boule au hasard dans l'urne.

Quelle est la probabilité d'obtenir une boule rouge portant un numéro pair ?

Solution. On modélise l'expérience par l'équiprobabilité sur l'ensemble des boules. Notons A : « Tirer une boule rouge » et B : « la boule tirée porte un numéro pair ». Alors, d'après l'énoncé, $\mathbf{P}(A) = \dfrac{3}{4}$ et $\mathbf{P}(B \mid A) = \dfrac{1}{3}$. On en déduit que la probabilité d'obtenir une boule rouge portant un nombre pair est

$$\mathbf{P}(A \cap B) = \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B \mid A) = \frac{3}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{4}.$$

Propriété 27

Soit A un évènement de probabilité non nulle. Alors, la fonction $\mathbf{P}_A$ qui à tout évènement $B \in \mathcal{A}$ associe la probabilité conditionnelle $\mathbf{P}_A(B) = \mathbf{P}(B \mid A)$ est une probabilité.

En particulier, pour tous évènements B et C,

- $0 \leqslant \mathbf{P}(B \mid A) \leqslant 1$;
- $\mathbf{P}(\overline{B} \mid A) = 1 - \mathbf{P}(B \mid A)$;
- $\mathbf{P}(B \cup C \mid A) = \mathbf{P}(B \mid A) + \mathbf{P}(C \mid A) - \mathbf{P}(B \cap C \mid A)$.

Démonstration. Comme $A \subset \Omega$, $A \cap \Omega = A$ donc $\mathbf{P}_A(\Omega) = \dfrac{\mathbf{P}(A \cap \Omega)}{\mathbf{P}(A)} = \dfrac{\mathbf{P}(A)}{\mathbf{P}(A)} = 1$.

De plus, si $(B_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ est une suite d'évènements deux à deux incompatibles alors

$$\left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}^*} B_i \right) \cap A = \bigcup_{i \in \mathbb{N}^*} (B_i \cap A)$$

et les évènements $B_i \cap A$ sont deux à deux incompatibles donc

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_A\left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}^*} A_i \right) &= \frac{\mathbf{P}\left(\left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}^*} B_i \right) \cap A \right)}{\mathbf{P}(A)} = \frac{\mathbf{P}\left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}^*} (B_i \cap A) \right)}{\mathbf{P}(A)} \\ &= \frac{1}{\mathbf{P}(A)} \sum_{i=1}^{+\infty} \mathbf{P}(B_i \cap A) = \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{\mathbf{P}(B_i \cap A)}{\mathbf{P}(A)} \\ &= \sum_{i=1}^{+\infty} \mathbf{P}_A(B_i) \end{aligned}$$

□

Exemple 28. On reprend la situation de l'exemple 26. Quelle est la probabilité d'obtenir une boule portant un numéro impair sachant que cette boule est rouge ?

Solution. On cherche $\mathbf{P}_A(\overline{B})$. Or, comme $\mathbf{P}_A$ est une probabilité,

$$\mathbf{P}_A(\overline{B}) = 1 - \mathbf{P}_A(B) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}.$$

2) Théorème des probabilités composées

Théorème 29. — Formule des probabilités composées

Soit A_1, A_2, ..., A_n des évènements tels que $\mathbf{P}(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_{n-1}) \neq 0$. Alors,

$$\mathbf{P}(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n) = \mathbf{P}(A_1)\mathbf{P}(A_2 \mid A_1)\mathbf{P}(A_3 \mid A_1 \cap A_2) \cdots \mathbf{P}(A_n \mid A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_{n-1}).$$

Démonstration. Considérons, pour tout entier $n \geqslant 2$, la proposition $\mathcal{P}(n)$ « pour tous évènements A_1, A_2, ..., A_n des évènements tels que $\mathbf{P}(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_{n-1}) \neq 0$,

$$\mathbf{P}(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n) = \mathbf{P}(A_1)\mathbf{P}(A_2 \mid A_1) \cdots \mathbf{P}(A_n \mid A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_{n-1}) \text{ »}$$

Initialisation. Soit A_1 et A_2 deux évènements tels que $\mathbf{P}(A_1) \neq 0$. Alors, d'après la propriété 25, $\mathbf{P}(A_1 \cap A_2) = \mathbf{P}(A_1)\mathbf{P}(A_2 \mid A_1)$ donc $\mathcal{P}(2)$ est vraie.

Hérédité. Soit un entier $n \geqslant 2$. Supposons que $\mathcal{P}(n)$ est vraie. Considérons $n+1$ évènements A_1, A_2, ..., A_{n+1} tels que $\mathbf{P}(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n) \neq 0$. Alors, d'après la propriété 25,

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n \cap A_{n+1}) &= \mathbf{P}\left((A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n) \cap A_{n+1}\right) \\ &= \mathbf{P}(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n)\mathbf{P}(A_{n+1} \mid A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n)\end{aligned}$$

Or, comme $\mathcal{P}(n)$ est vraie,

$$\mathbf{P}(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n) = \mathbf{P}(A_1)\mathbf{P}(A_2 \mid A_1) \cdots \mathbf{P}(A_n \mid A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_{n-1})$$

donc

$$\mathbf{P}(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n \cap A_{n+1}) = \mathbf{P}(A_1)\mathbf{P}(A_2 \mid A_1) \cdots \mathbf{P}(A_{n+1} \mid A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n)$$

et ainsi, $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie. **Conclusion.** On a donc démontré par récurrence que, pour tout entier $n \geqslant 2$, $\mathcal{P}(n)$ est vraie, ce qui prouve la propriété. $\square$

Exemple 30. On considère un urne qui contient N boules dont r sont rouges (avec $r \leqslant N$). On tire successivement et sans remise n boules de l'urne (avec $n \leqslant r$). Déterminer la probabilité de ne tirer que des boules rouges.

Solution. Notons, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, A_i : « Tirer une boule rouge au k-ième tirage ». On cherche la probabilité de $B = A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n$. Or, $\mathbf{P}(A_1) = \dfrac{r}{N}$ et, pour tout entier $k \geqslant 2$, $\mathbf{P}(A_k \mid A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_{k-1}) = \dfrac{r-(k-1)}{N-(k-1)}$. Ainsi, d'après le théorème des probabilités composées

$$\mathbf{P}(B) = \frac{r}{N} \times \frac{r-1}{N-1} \times \frac{r-2}{N-2} \times \cdots \times \frac{r-(n-1)}{N-(n-1)} = \frac{r!(N-n)!}{N!(r-n)!} = \frac{r!}{n!(r-n)!} \times \frac{n!(N-n)!}{N!} = \frac{\binom{r}{n}}{\binom{N}{n}}.$$

3) Formule des probabilités totales

Notation 31. Soit $(A_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ une suite d'évènements. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Si $I = [\![1, n]\!]$, on note $\sum_{i\in I} \mathbf{P}(A_i) = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{P}(A_i)$ et si $I = \mathbb{N}^*$, on note $\sum_{i\in I} \mathbf{P}(A_i) = \sum_{i=1}^{+\infty} \mathbf{P}(A_i)$.

Théorème 32. — Formule de probabilités totales

Soit un entier $n \geqslant 1$, $I = [\![1, n]\!]$ ou $I = \mathbb{N}^*$ et $(A_i)_{i\in I}$ un système complet d'évènements. Alors, pour tout évènement B,

$$\mathbf{P}(B) = \sum_{i\in I} \mathbf{P}(B \cap A_i)$$

Si, de plus, $\mathbf{P}(A_i) \neq 0$ pour tout $i \in I$ alors

$$\mathbf{P}(B) = \sum_{i\in I} \mathbf{P}(A_i)\mathbf{P}(B \mid A_i).$$

Démonstration. Soit B un évènement.

Par définition, $\Omega = \bigcup_{i\in I} A_i$. Or, comme $B \subset \Omega$, $B = B \cap \Omega$ donc

$$B = B \cap \left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) = \bigcup_{i\in I}(B \cap A_i)$$

et, comme les A_i sont deux à deux incompatibles, les évènements $B \cap A_i$ sont également incompatibles donc

$$\mathbf{P}(B) = \mathbf{P}\left(\bigcup_{i\in I}(B \cap A_i)\right) = \sum_{i\in I} \mathbf{P}(B \cap A_i).$$

Supposons que, de plus, pour tout $i \in I$, $\mathbf{P}(A_i) \neq 0$. Alors, d'après la propriété 25, pour tout $i \in I$, $\mathbf{P}(B \cap A_i) = \mathbf{P}(A_i)\mathbf{P}(B \cap A_i)$ donc

$$\mathbf{P}(B) = \sum_{i\in I} \mathbf{P}(A_i)\mathbf{P}(B \mid A_i).$$

□

Exemple 33. On dispose de k urnes U_1, U_2, ..., U_k. Pour tout $i \in [\![1, k]\!]$, l'urne U_i contient i boules rouges et $k - i$ boules noires. On choisit une urne au hasard et on tire une boule dans cette urne au hasard.

Quelle est la probabilité de tirer une boule rouge ?

Solution. Notons, pour tout $i \in [\![1, k]\!]$, A_i : « Choisir l'urne U_i » et B : « Tirer une boule rouge ». Alors, $(A_i)_{i\in[\![1,k]\!]}$ est un système complet d'évènements donc, par la formule des probabilités totales,

$$\mathbf{P}(B) = \sum_{i=1}^{k} \mathbf{P}(A_i)\mathbf{P}(B \mid A_i) = \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{k} \times \frac{i}{k} = \frac{1}{k^2}\sum_{i=1}^{k} i = \frac{1}{k^2} \times \frac{k(k+1)}{2} = \frac{k+1}{2k}.$$

4) Formule de Bayes

Propriété 34. — Formule de Bayes

Soit un entier $n \geqslant 1$, $I = [\![1, n]\!]$ ou $I = \mathbb{N}^*$ et $(A_i)_{i\in I}$ un système complet d'évènements tel que, pour tout $i \in I$, $\mathbf{P}(A_i) \neq 0$. Alors, pour tout évènement B tel que $\mathbf{P}(B) \neq 0$ et pour tout $j \in I$,

$$\mathbf{P}(A_j \mid B) = \frac{\mathbf{P}(A_j)\mathbf{P}(B \mid A_j)}{\sum_{i\in I} \mathbf{P}(A_i)\mathbf{P}(B \mid A_i)}.$$

Démonstration. Soit un évènement B tel que $\mathbf{P}(B) \neq 0$. Soit $j \in I$. Alors, d'après la propriété 25,

$$\mathbf{P}(A_j \mid B) = \frac{\mathbf{P}(A_j \cap B)}{\mathbf{P}(B)} = \frac{\mathbf{P}(A_j)\mathbf{P}(B \mid A_j)}{\mathbf{P}(B)}.$$

Or, d'après la formule de probabilités totales, $\mathbf{P}(B) = \sum_{i\in I} \mathbf{P}(A_i)\mathbf{P}(B \mid A_i)$ donc

$$\mathbf{P}(A_j \mid B) = \frac{\mathbf{P}(A_j)\mathbf{P}(B \mid A_j)}{\sum_{i\in I} \mathbf{P}(A_i)\mathbf{P}(B \mid A_i)}.$$

□

Remarque 35.

1. La formule de Bayes permet « d'inverser la dépendance ». Si on connaît, pour tout $i \in I$, la probabilité de B sachant A_i, on peut retrouver, pour tout $j \in I$, la probabilité de A_j sachant B.
2. En particulier, si A est un évènement dont la probabilité est différente de 0 et 1 et si B est un évènement de probabilité non nulle alors

$$\mathbf{P}(A \mid B) = \frac{\mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B \mid A)}{\mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B \mid A) + \mathbf{P}(\overline{A})\mathbf{P}(B \mid \overline{A})}.$$

Exemple 36. Dans l'exemple 33, déterminer, pour tout $j \in [\![1, k]\!]$, la probabilité que la boule tirée provienne de l'urne U_j sachant que cette boule est rouge.

Solution. On reprend les notations de la solution de l'exemple 33. Soit $j \in [\![1, k]\!]$. D'après la formule de Bayes,

$$\mathbf{P}(A_j \mid B) = \frac{\mathbf{P}(A_j)\mathbf{P}(B \mid A_j)}{\mathbf{P}(B)} = \frac{\frac{1}{k} \times \frac{j}{k}}{\frac{k+1}{2k}} = \frac{j}{k^2} \times \frac{2k}{k+1} = \frac{2j}{k(k+1)}.$$

IV. — Indépendance d'évènements

Définition 37

On dit que deux évènements A et B sont **indépendants** si $\mathbf{P}(A \cap B) = \mathbf{P}(A) \times \mathbf{P}(B)$.

Exemple 38. On lance un dé cubique équilibré dont les faces sont numérotées de 1 à 6. Étudier l'indépendance des évènements A : « On obtient un chiffre pair », B : « On obtient un chiffre supérieur ou égal à 4 » et C : « On obtient un chiffre inférieur ou égal à 4 ».

Solution. On modélise l'expérience par l'équiprobabilité sur $\Omega = [\![1, 6]\!]$.

Alors,

$$\mathbf{P}(A \cap B) = \mathbf{P}(\{4, 6\}) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

et $\mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B) = \frac{3}{6} \times \frac{3}{6} = \frac{1}{4} \neq \mathbf{P}(A \cap B)$ donc A et B ne sont pas indépendants.

De même,

$$\mathbf{P}(A \cap C) = \mathbf{P}(\{2, 4\}) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

et $\mathbf{P}(A)\mathbf{P}(C) = \frac{3}{6} \times \frac{4}{6} = \frac{1}{3} = \mathbf{P}(A \cap C)$ donc A et C sont indépendants.

Enfin,

$$\mathbf{P}(B \cap C) = \mathbf{P}(\{4\}) = \frac{1}{6}$$

et $\mathbf{P}(B)\mathbf{P}(C) = \frac{3}{6} \times \frac{4}{6} = \frac{1}{3} \neq \mathbf{P}(B \cap C)$ donc B et C ne sont pas indépendants.

⚠ Il ne faut pas confondre évènements indépendants et évènements incompatibles. La notion d'évènements incompatibles est une notion ensembliste intrinsèque aux évènements (ont-ils des éléments en commun ?) alors que la notion d'évènements indépendants est une notion qui dépend de la probabilité $\mathbf{P}$.

Propriété 39

Soit A et B deux évènements tels que $\mathbf{P}(A) \neq 0$. Alors, A et B sont indépendants si et seulement si $\mathbf{P}(B) = \mathbf{P}_A(B)$.

Démonstration. Par définition, A et B sont indépendants si et seulement si $\mathbf{P}(A \cap B) = \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B)$ ce qui est équivalent, comme $\mathbf{P}(A) \neq 0$, à $\dfrac{\mathbf{P}(A \cap B)}{\mathbf{P}(A)} = \mathbf{P}(B)$ i.e. $\mathbf{P}_A(B) = \mathbf{P}(B)$. □

Remarque 40. Ainsi, l'indépendance de deux évènements A et B s'interprète de la manière suivante : le fait que A soit réalisé ou non n'a pas d'influence sur la probabilité que B se réalise.

Cela éclaire les résultats de l'exemple 38.

En effet, si A est réalisé, l'univers devient $\{2, 4, 6\}$. Sur ce nouvel univers (toujours muni de l'équiprobabilité), la probabilité que B se réalise est $\frac{2}{3}$ et cette probabilité (conditionnelle) est différente de la probabilité de B sur l'univers Ω. Ainsi, le fait que A soit réalisé modifie la probabilité que B se réalise : les évènements ne sont pas indépendants.

En revanche, la probabilité que C se réalise sachant que A est réalisé est aussi $\frac{2}{3}$ mais cette fois-ci cette probabilité (conditionnelle) est égale à la probabilité de C sur l'univers Ω. Ainsi, le fait que A soit réalisé ne modifie pas la probabilité que C se réalise : les évènements sont indépendants.

Théorème 41

Soit A et B deux évènements indépendants. Alors, $\overline{A}$ et B sont également indépendants.

Démonstration. Comme A et $\overline{A}$ forment une partition de l'univers, par le formule de probabilités totales, $\mathbf{P}(B) = \mathbf{P}(A \cap B) + \mathbf{P}(\overline{A} \cap B)$ donc, comme $\mathbf{P}(A \cap B) = \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B)$,

$$\mathbf{P}(\overline{A} \cap B) = \mathbf{P}(B) - \mathbf{P}(A \cap B) = \mathbf{P}(B) - \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B) = [1 - \mathbf{P}(A)]\,\mathbf{P}(B) = \mathbf{P}(\overline{A})\mathbf{P}(B)$$

et ainsi $\overline{A}$ et B sont indépendants. □

Remarque 42. Soit A et B deux évènements indépendants. Alors, $\overline{A}$ et B sont indépendants et, de la même façon, A et $\overline{B}$ sont indépendants. De plus, en appliquant le théorème précédent à A et $\overline{B}$, on en déduit que $\overline{A}$ et $\overline{B}$ sont également indépendants.

Définition 43

On dit que des évènements A_1, A_2, ..., A_n sont

- **deux à deux indépendants** si, pour tout $(i\,;j) \in [\![1,n]\!]^2$ tel que $i \neq j$, A_i et A_j sont indépendants ;
- **mutuellement indépendants** si, pour toute partie $\{B_1, B_2, ..., B_m\}$ incluse dans $\{A_1, A_2, ..., A_n\}$,
$$\mathbf{P}\left(\bigcap_{j=1}^{m} B_j\right) = \mathbf{P}(B_1)\mathbf{P}(B_2)\cdots\mathbf{P}(B_m).$$

Remarque 44. Si A_1, A_2, ..., A_n sont mutuellement indépendants alors il sont deux à deux indépendants mais la réciproque est fausse en général.

Exemple 45. On lance deux fois de suite une pièce équilibrée. On considère les évènements A : « Obtenir deux fois de suite le même résultat », B : « Obtenir *pile* au premier lancer » et C : « Obtenir *face* au second lancer ».

1. Les évènements A, B et C sont-ils deux à deux indépendants ?
2. Sont-ils mutuellement indépendants ?

Solution.

1. On modélise l'expérience par l'équiprobabilité sur l'ensemble des 4 couples de lancers : $\{(pile, pile), (pile, face), (face, pile), (face, face)\}$.
   Alors, $\mathbf{P}(A \cap B) = \mathbf{P}((pile, pile)) = \dfrac{1}{4}$ et $\mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B) = \dfrac{2}{4} \times \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2}$ donc A et B sont indépendants.
   De la même façon, A et C sont indépendants.
   Enfin, $\mathbf{P}(B \cap C) = \mathbf{P}((pile, face)) = \dfrac{1}{4}$ et $\mathbf{P}(B)\mathbf{P}(C) = \dfrac{2}{4} \times \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{4}$ donc B et C sont indépendants. Ainsi, A, B et C sont deux à deux indépendants.
2. On peut remarquer que $A \cap B \cap C = \varnothing$ donc $\mathbf{P}(A \cap B \cap C) = 0$ alors que $\mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B)\mathbf{P}(C) = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{8} \neq \mathbf{P}(A \cap B \cap C)$ donc A, B et C ne sont pas mutuellement indépendants.

Exemple 46. On lance une pièce plusieurs fois jusqu'à obtenir pour la première fois « Pile » et on note le numéro du lancer où cela s'est produit. On note B l'évènement : « ne jamais obtenir Pile » et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit l'évènement F_n : « obtenir Face au n-ième lancer » et A_n : « obtenir Pile pour la première fois au n-ième lancer ».

1. Exprimer B en fonction des évènements (A_n).
2. Déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, A_n en fonction des (F_k).
3. Démontrer que B est un évènement négligeable.

Solution.

1. On peut écrire $B = \bigcap_{n=1}^{+\infty} \overline{A_n}$.

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Alors, $A_n = \left(\bigcap_{i=1}^{n-1} F_i \right) \cap \overline{F_n}$.

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Comme les lancers sont indépendantes, les évènements (F_i) sont mutuellement indépendantes donc

$$\mathbf{P}(A_n) = \mathbf{P}(F_1)\mathbf{P}(F_2)\cdots\mathbf{P}(F_{n-1})\mathbf{P}(\overline{F_n}) = \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

Comme les évènements (A_n) sont deux à deux incompatibles, on en déduit que

$$\mathbf{P}(\overline{B}) = \mathbf{P}\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbf{P}(A_n) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \frac{1}{2}\sum_{p=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^p = \frac{1}{2} \times \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 1.$$

Par suite, $\mathbf{P}(B) = 1 - \mathbf{P}(\overline{B}) = 0$ donc B est négligeable.