⧫ Chapitre 4. Généralités sur les probabilités

I. — Probabilité sur un ensemble quelconque

1) Expériences aléatoires

Définition 1

Une **expérience aléatoire** (ou épreuve) est une expérience qui possède les 3 propriétés suivantes :

- l'ensemble des résultats possibles de l'expérience est connu *a priori* ;
- on peut répéter l'expérience dans les mêmes conditions ;
- le résultat d'une réalisation de l'expérience est le fruit du hasard.

L'ensemble des résultats (ou issues) possibles d'une expérience aléatoire est appelé l'**univers** de cette expérience. On le note, en général, Ω.

Exemple 2.

1. Lancer une pièce est une expérience aléatoire et son univers est $\Omega = \{pile, face\}$.

2. Lancer un dé cubique est une expérience aléatoire et son univers est $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

3. Lancer une pièce indéfiniment est une expérience aléatoire et son univers est l'ensemble de toutes les suites de la forme $(pile, face, face, face, pile, ...)$.

4. Choisir un nombre réel entre 0 et 1 compris est une expérience aléatoire et son univers est $[0\,;1]$.

Remarque 3. Contrairement à ce qui a été vu en première année, on considère ici des univers qui peuvent être finis ou infinis.

2) Évènements

Dans tout ce paragraphe, on considère une expérience aléatoire et on note Ω son univers. En première année, les évènements ont été définis comme les éléments de $\mathcal{P}(\Omega)$, c'est-à-dire toutes les parties de l'univers.

Dans le cas où l'univers est infini, il n'est pas toujours possible de donner un sens à la notion de probabilité sur $\mathcal{P}(\Omega)$. On admettra cependant qu'il existe un ensemble de parties $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ sur lequel cela est possible.

Définition 4

Un **évènement** est un élément de l'ensemble $\mathcal{A}$.
Si A est un évènement et si $a \in A$, on dit que l'issue a **réalise** l'évènement A.

Remarque 5. Cette vision est la vision moderne des évènements comme étant des parties de l'univers. Cependant, historiquement, les évènements ont d'abord été définis à l'aide de phrases les décrivant. On a gardé aujourd'hui cette double vision et il faut savoir passer de l'une à l'autre.

Définition 6

1. L'ensemble $\varnothing$ est un évènement appelé l'**évènement impossible**. Il n'est réalisé par aucune issue de l'expérience.
2. L'ensemble Ω est un évènement appelé l'**évènement certain**. Il est réalisé par toutes les issues de l'expérience.

Définition 7

Soit A et B deux évènements de Ω. Alors,

1. $A \cup B$ est un évènement qui est réalisé si (au moins) l'un des deux évènements A ou B est réalisé.
2. $A \cap B$ est un évènement qui est réalisé si les deux évènements A et B sont réalisés (simultanément).
3. $\overline{A} = \Omega \setminus A$ est un évènement qui est réalisé si A ne l'est pas.

Exemple 8. On lance indéfiniment un dé cubique et on note, à chaque lancer, le résultat obtenu.

1. Quel est l'univers de cette expérience ?
2. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on note A_k l'évènement « Obtenir un 6 au k-ième lancer ». Exprimer les évènements suivants en fonction des évènements A_k ($k \in \mathbb{N}^*$) :
   a. B : « Obtenir un 6 lors du 5ième et du 10ième lancers »
   b. C : « Ne pas obtenir un 6 au 4ième lancer »
   c. D : « Obtenir au moins un 6 lors des deux premiers lancers ».

Remarque 9. De façon plus générale, si $(A_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ est une suite d'évènements, on peut définir les ensembles suivants dont on admet que ce sont des évènements :

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \{\omega \in \Omega \mid \exists p \in [\![1,n]\!],\ \omega \in A_p\}$. Ainsi, $\displaystyle\bigcup_{i=1}^{n} A_i$ est réalisé si et seulement s'il existe $p \in [\![1,n]\!]$ tel que A_p soit réalisé.
2. $\displaystyle\bigcup_{i=1}^{+\infty} A_i = \{\omega \in \Omega \mid \exists p \in \mathbb{N}^*,\ \omega \in A_p\}$. Ainsi, $\displaystyle\bigcup_{i=1}^{+\infty} A_i$ est réalisé si et seulement s'il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que A_p soit réalisé.
3. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\bigcap_{i=1}^{n} A_i = \{\omega \in \Omega \mid \forall i \in [\![1,n]\!],\ \omega \in A_i\}$. Ainsi, $\displaystyle\bigcap_{i=1}^{n} A_i$ est réalisé si et seulement si, pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, A_i est réalisé.
4. $\displaystyle\bigcap_{i=1}^{+\infty} A_i = \{\omega \in \Omega \mid \forall i \in \mathbb{N}^*,\ \omega \in A_p\}$. Ainsi, $\displaystyle\bigcap_{i=1}^{+\infty} A_i$ est réalisé si et seulement si, pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, A_i est réalisé.

Exemple 10. En reprenant l'énoncé de l'exemple 8, exprimer les évènements suivants en fonction des évènements A_k ($k \in \mathbb{N}^*$) :

1. B : « Obtenir un 6 lors de chacun des 5 premiers lancers »
2. C : « Obtenir un 6 pour la première fois au 4ième lancer »
3. D : « Obtenir exactement un 6 lors des 3 premiers lancers »
4. E : « Ne jamais obtenir 6 »

5. F : « N'obtenir que des 6 »
6. G : « N'obtenir aucun 6 à partir du 20ième lancer »
7. H : « Obtenir au moins un 6 à partir du 30ième lancer »
8. K : « N'obtenir que des 6 à partir d'un certain lancer »

Notation 11.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $I = [\![1, n]\!]$. On note $\displaystyle\bigcup_{i\in I} A_i = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$ et $\displaystyle\bigcap_{i\in I} A_i = \bigcap_{i=1}^{n} A_i$.
2. On note $\displaystyle\bigcup_{i\in\mathbb{N}^*} A_i = \bigcup_{i=1}^{+\infty} A_i$ et $\displaystyle\bigcap_{i\in\mathbb{N}^*} A_i = \bigcap_{i=1}^{+\infty} A_i$.

Propriété 12. — Lois de de Morgan

Soit $(A_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ une suite d'évènements. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Si $I = [\![1, n]\!]$ ou $I = \mathbb{N}^*$ alors

$$\overline{\bigcup_{i\in I} A_i} = \bigcap_{i\in I} \overline{A_i} \qquad \text{et} \qquad \overline{\bigcap_{i\in I} A_i} = \bigcup_{i\in I} \overline{A_i}.$$

Définition 13

1. On dit que deux évènements A et B sont **incompatibles** (ou disjoints) si $A \cap B = \varnothing$.
2. On suppose que $I = [\![1, n]\!]$ ou $I = \mathbb{N}^*$. Si $(A_i)_{i\in\, I}$ est une suite (finie ou infinie) d'évènements, on dit que ces évènements sont **deux à deux incompatibles** si, pour tout $(i\,;j) \in I^2$ tel que $i \neq j$, A_i et A_j sont incompatibles.

Exemple 14.

1. On lance trois fois de suite une pièce équilibrée. Les évènements A : « Obtenir au moins une fois *face* » et $\overline{A}$: « N'obtenir que des *pile* » sont incompatibles.
   Les évènements C_1 ; « Obtenir pile pour la première fois au premier lancer », C_2 : « Obtenir pile pour la première fois au deuxième lancer » et C_3 : « Obtenir pile pour la première fois au troisième lancer » sont deux à deux incompatibles.
2. De manière générale, pour tout évènement A, les évènements A et $\overline{A}$ sont incompatibles.
3. Dans l'exemple 8, les évènements A_k pour $k \in \mathbb{N}^*$, ne sont pas deux à deux incompatibles car $A_1 \cap A_2 \neq \varnothing$ puisqu'on peut obtenir 6 au premier et au second lancers.

Définition 15

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $I = [\![1, n]\!]$ ou $I = \mathbb{N}^*$. On dit que les évènements d'une suite (finie ou infine) d'évènements $(A_i)_{i\in I}$ forment un **système complet d'évènements** si

1. les évènements de la suite $(A_i)_{i\in I}$ sont deux à deux incompatibles.
2. $\displaystyle\bigcup_{i\in I} A_i = \Omega$.

Exemple 16.

1. Dans l'exemple 14, les évènements C_1, C_2 et C_3 forment-ils un système complet d'évènements ?
2. Déterminer un système complet d'évènements pour l'expérience consistant à lancer une infinité de fois un dé cubique.

II. — Probabilité sur un univers quelconque

1) Définition

Définition 17

Soit Ω un univers et $\mathcal{A}$ un ensemble d'évènements associé. Une **loi de probabilité** (ou simplement une **probabilité**) sur Ω est une fonction $\mathbf{P} : \mathcal{A} \to [0\,;1]$ telle que :

1. $\mathbf{P}(\Omega) = 1$;
2. pour toute suite $(A_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ d'évènements <u>deux à deux incompatibles</u>,

$$\mathbf{P}\left(\bigcup_{i=1}^{+\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{+\infty} \mathbf{P}(A_i).$$

Le triplet $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ est alors appelé un **espace probabilisé** et, si A est un évènement, le réel $\mathbf{P}(A)$ est appelé la **probabilité** de A.

Remarque 18.

1. Le mot « probabilité » désigne, selon cas, une fonction de $\mathcal{A}$ dans $\mathbb{R}$ ou un nombre réel.
2. Par définition, la probabilité de n'importe quel évènement est un nombre compris entre 0 et 1. Quand on calcule des probabilités, il est donc nécessaire de toujours s'assurer que les résultats obtenus sont des réels compris entre 0 et 1.

Définition 19

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ un espace probabilisé et A un évènement.

1. On dit que A est **négligeable** si $\mathbf{P}(A) = 0$.
2. On dit que A est **presque sûr** si $\mathbf{P}(A) = 1$.

2) Propriétés

Propriété 20

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ un espace probabilisé et A et B deux évènements.

1. $\mathbf{P}(\varnothing) = 0$.
2. Si $A \subset B$ alors $\mathbf{P}(A) \leqslant \mathbf{P}(B)$ et $\mathbf{P}(B \setminus A) = \mathbf{P}(B) - \mathbf{P}(A)$.
3. $\mathbf{P}(\overline{A}) = 1 - \mathbf{P}(A)$.
4. $\mathbf{P}(A \cup B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B) - \mathbf{P}(A \cap B)$.

Remarque 21.

1. Si Ω est infini, les singletons ne sont pas forcément des évènements et on ne peut pas définir la probabilité $\mathbf{P}$ en donnant seulement l'image des singletons. On admettra que c'est cependant le cas si Ω est inclus dans $\mathbb{N}$, que dans ce cas, on peut prendre $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$ et que si $\Omega = (\omega_n)_{n\in\mathbb{N}}$ alors, pour montrer que $\mathbf{P}$ est une probabilité, il suffit de montrer que la série $\sum \mathbf{P}(\omega_n)$ converge et que sa somme est égale à 1.
2. La notion d'équiprobabilité n'a plus forcément de sens dans le cas où Ω est infini.

Exemple 22.

1. Montrer qu'on définit une probabilité sur $\mathbb{N}$ en posant, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbf{P}(\{n\}) = \dfrac{1}{2^{n+1}}$.
2. Calculer les probabilités de $A = [\![1, 4]\!]$, $B = \{2k \mid k \in \mathbb{N}\}$ et $C = \{2k+1 \mid k \in \mathbb{N}\}$.

III. — Probabilité conditionnelle

Dans toute la suite, on considère un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$.

1) Définition

Définition 23

Soit A un évènement de probabilité non nulle et soit B un évènement quelconque. On définit la **probabilité de** B **sachant** A, notée $\mathbf{P}(B \mid A)$ ou $\mathbf{P}_A(B)$, par

$$\mathbf{P}(B \mid A) = \mathbf{P}_A(B) = \frac{\mathbf{P}(A \cap B)}{\mathbf{P}(A)}.$$

Exemple 24.

1. On lance un dé cubique équilibré dont les faces sont numérotées de 1 à 6. Quelle est la probabilité que le chiffre obtenu soit 6 sachant que ce chiffre est pair ?
2. En reprenant la situation de l'exemple 22, déterminer la probabilité de B sachant $\overline{A}$.

Propriété 25

Soit A et B deux évènements.

1. Si $\mathbf{P}(A) \neq 0$ alors $\mathbf{P}(A \cap B) = \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B \mid A)$.
2. Si $\mathbf{P}(B) \neq 0$ alors $\mathbf{P}(A \cap B) = \mathbf{P}(B)\mathbf{P}(A \mid B)$.
3. Si $\mathbf{P}(A) \neq 0$ et $\mathbf{P}(B) \neq 0$ alors $\mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B \mid A) = \mathbf{P}(B)\mathbf{P}(A \mid B)$.

Exemple 26. On considère une urne qui contient des boules numérotées.

On sait que $\frac{3}{4}$ des boules sont rouges et que $\frac{1}{3}$ des boules rouges portent un numéro pair. On tire une boule au hasard dans l'urne.

Quelle est la probabilité d'obtenir une boule rouge portant un numéro pair ?

Propriété 27

Soit A un évènement de probabilité non nulle. Alors, la fonction $\mathbf{P}_A$ qui à tout évènement $B \in \mathcal{A}$ associe la probabilité conditionnelle $\mathbf{P}_A(B) = \mathbf{P}(B \mid A)$ est une probabilité.

En particulier, pour tous évènements B et C,

- $0 \leqslant \mathbf{P}(B \mid A) \leqslant 1$;
- $\mathbf{P}(\overline{B} \mid A) = 1 - \mathbf{P}(B \mid A)$;
- $\mathbf{P}(B \cup C \mid A) = \mathbf{P}(B \mid A) + \mathbf{P}(C \mid A) - \mathbf{P}(B \cap C \mid A)$.

Exemple 28. On reprend la situation de l'exemple 26. Quelle est la probabilité d'obtenir une boule portant un numéro impair sachant que cette boule est rouge ?

2) Théorème des probabilités composées

Théorème 29. — Formule des probabilités composées

Soit A_1, A_2, ..., A_n des évènements tels que $\mathbf{P}(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_{n-1}) \neq 0$. Alors,

$$\mathbf{P}(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n) = \mathbf{P}(A_1)\mathbf{P}(A_2 \mid A_1)\mathbf{P}(A_3 \mid A_1 \cap A_2) \cdots \mathbf{P}(A_n \mid A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_{n-1}).$$

Exemple 30. On considère un urne qui contient N boules dont r sont rouges (avec $r \leqslant N$). On tire successivement et sans remise n boules de l'urne (avec $n \leqslant r$). Déterminer la probabilité de ne tirer que des boules rouges.

3) Formule des probabilités totales

Notation 31. Soit $(A_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ une suite d'évènements. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Si $I = [\![1, n]\!]$, on note $\sum_{i\in I} \mathbf{P}(A_i) = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{P}(A_i)$ et si $I = \mathbb{N}^*$, on note $\sum_{i\in I} \mathbf{P}(A_i) = \sum_{i=1}^{+\infty} \mathbf{P}(A_i)$.

Théorème 32. — Formule de probabilités totales

Soit un entier $n \geqslant 1$, $I = [\![1, n]\!]$ ou $I = \mathbb{N}^*$ et $(A_i)_{i\in I}$ un système complet d'évènements. Alors, pour tout évènement B,

$$\mathbf{P}(B) = \sum_{i\in I} \mathbf{P}(B \cap A_i)$$

Si, de plus, $\mathbf{P}(A_i) \neq 0$ pour tout $i \in I$ alors

$$\mathbf{P}(B) = \sum_{i\in I} \mathbf{P}(A_i)\mathbf{P}(B \mid A_i).$$

Exemple 33. On dispose de k urnes U_1, U_2, ..., U_k. Pour tout $i \in [\![1, k]\!]$, l'urne U_i contient i boules rouges et $k - i$ boules noires. On choisit une urne au hasard et on tire une boule dans cette urne au hasard.

Quelle est la probabilité de tirer une boule rouge ?

4) Formule de Bayes

Propriété 34. — Formule de Bayes

Soit un entier $n \geqslant 1$, $I = [\![1, n]\!]$ ou $I = \mathbb{N}^*$ et $(A_i)_{i\in I}$ un système complet d'évènements tel que, pour tout $i \in I$, $\mathbf{P}(A_i) \neq 0$. Alors, pour tout évènement B tel que $\mathbf{P}(B) \neq 0$ et pour tout $j \in I$,

$$\mathbf{P}(A_j \mid B) = \frac{\mathbf{P}(A_j)\mathbf{P}(B \mid A_j)}{\sum_{i\in I} \mathbf{P}(A_i)\mathbf{P}(B \mid A_i)}.$$

Remarque 35.

1. La formule de Bayes permet « d'inverser la dépendance ». Si on connaît, pour tout $i \in I$, la probabilité de B sachant A_i, on peut retrouver, pour tout $j \in I$, la probabilité de A_j sachant B.

2. En particulier, si A est un évènement dont la probabilité est différente de 0 et 1 et si B est un évènement de probabilité non nulle alors

$$\mathbf{P}(A \mid B) = \frac{\mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B \mid A)}{\mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B \mid A) + \mathbf{P}(\overline{A})\mathbf{P}(B \mid \overline{A})}.$$

Exemple 36. Dans l'exemple 33, déterminer, pour tout $j \in [\![1, k]\!]$, la probabilité que la boule tirée provienne de l'urne U_j sachant que cette boule est rouge.

IV. — Indépendance d'évènements

Définition 37

On dit que deux évènements A et B sont **indépendants** si $\mathbf{P}(A \cap B) = \mathbf{P}(A) \times \mathbf{P}(B)$.

Exemple 38. On lance un dé cubique équilibré dont les faces sont numérotées de 1 à 6. Étudier l'indépendance des évènements A : « On obtient un chiffre pair », B : « On obtient un chiffre supérieur ou égal à 4 » et C : « On obtient un chiffre inférieur ou égal à 4 ».

Il ne faut pas confondre évènements indépendants et évènements incompatibles. La notion d'évènements incompatibles est une notion ensembliste intrinsèque aux évènements (ont-ils des éléments en commun ?) alors que la notion d'évènements indépendants est une notion qui dépend de la probabilité $\mathbf{P}$.

Propriété 39

Soit A et B deux évènements tels que $\mathbf{P}(A) \neq 0$. Alors, A et B sont indépendants si et seulement si $\mathbf{P}(B) = \mathbf{P}_A(B)$.

Remarque 40. Ainsi, l'indépendance de deux évènements A et B s'interprète de la manière suivante : le fait que A soit réalisé ou non n'a pas d'influence sur la probabilité que B se réalise.

Cela éclaire les résultats de l'exemple 38.

En effet, si A est réalisé, l'univers devient $\{2, 4, 6\}$. Sur ce nouvel univers (toujours muni de l'équiprobabilité), la probabilité que B se réalise est $\frac{2}{3}$ et cette probabilité (conditionnelle) est différente de la probabilité de B sur l'univers Ω. Ainsi, le fait que A soit réalisé modifie la probabilité que B se réalise : les évènements ne sont pas indépendants.

En revanche, la probabilité que C se réalise sachant que A est réalisé est aussi $\frac{2}{3}$ mais cette fois-ci cette probabilité (conditionnelle) est égale à la probabilité de C sur l'univers Ω. Ainsi, le fait que A soit réalisé ne modifie pas la probabilité que C se réalise : les évènements sont indépendants.

Théorème 41

Soit A et B deux évènements indépendants. Alors, $\overline{A}$ et B sont également indépendants.

Remarque 42. Soit A et B deux évènements indépendants. Alors, $\overline{A}$ et B sont indépendants et, de la même façon, A et $\overline{B}$ sont indépendants. De plus, en appliquant le théorème précédent à A et $\overline{B}$, on en déduit que $\overline{A}$ et $\overline{B}$ sont également indépendants.

Définition 43

On dit que des évènements A_1, A_2, ..., A_n sont

- **deux à deux indépendants** si, pour tout $(i\,;j) \in [\![1,n]\!]^2$ tel que $i \neq j$, A_i et A_j sont indépendants ;
- **mutuellement indépendants** si, pour toute partie $\{B_1, B_2, ..., B_m\}$ incluse dans $\{A_1, A_2, ..., A_n\}$,

$$\mathbf{P}\left(\bigcap_{j=1}^{m} B_j\right) = \mathbf{P}(B_1)\mathbf{P}(B_2)\cdots\mathbf{P}(B_m).$$

Remarque 44. Si A_1, A_2, ..., A_n sont mutuellement indépendants alors il sont deux à deux indépendants mais la réciproque est fausse en général.

Exemple 45. On lance deux fois de suite une pièce équilibrée. On considère les évènements A : « Obtenir deux fois de suite le même résultat », B : « Obtenir *pile* au premier lancer » et C : « Obtenir *face* au second lancer ».

1. Les évènements A, B et C sont-ils deux à deux indépendants ?
2. Sont-ils mutuellement indépendants ?

Exemple 46. On lance une pièce plusieurs fois jusqu'à obtenir pour la première fois « Pile » et on note le numéro du lancer où cela s'est produit. On note B l'évènement : « ne jamais obtenir Pile » et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit l'évènement F_n : « obtenir Face au n-ième lancer » et A_n : « obtenir Pile pour la première fois au n-ième lancer ».

1. Exprimer B en fonction des évènements (A_n).
2. Déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, A_n en fonction des (F_k).
3. Démontrer que B est un évènement négligeable.

V. — Exercices

Exercice 1. Soit $(A_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ une suite d'évènements et $n \in \mathbb{N}^*$. Exprimer les évènements suivants à l'aide des évènements A_i :

1. B : « au moins un des évènements A_1, A_2, ..., A_n se réalise ».
2. C : « au moins un des évènements de la suite $(A_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ se réalise ».
3. D : « aucun des évènements A_1, A_2, ..., A_n ne se réalise ».
4. E : « aucun des évènements de la suite $(A_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ ne se réalise ».
5. F : « A_1 est le seul des évènements de la suite $(A_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ qui se réalise »
6. G : « un seul des évènements A_1, A_2, ..., A_n se réalise ».
7. G : « un seul des évènements de la suite $(A_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ se réalise ».

Exercice 2. On tire successivement et avec remise des boules dans urne contenant 1 boule rouge et 9 boules blanches. Pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, on note R_i l'évènement « la i-ème boule tirée est rouge ». Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Traduire en langage courant les évènements suivants :

$$A = \bigcup_{i=1}^{n} R_i \qquad B = \bigcap_{i=1}^{n} R_i \qquad C = \bigcup_{i=1}^{+\infty} R_i \qquad D = \bigcup_{i=1}^{+\infty} \overline{R_i}$$

$$E = \bigcap_{i=1}^{+\infty} R_i \qquad F = \bigcap_{i=1}^{+\infty} \overline{R_i} \qquad G = \bigcup_{k=1}^{+\infty}\bigcap_{i=k}^{+\infty} R_i \qquad H = \bigcap_{k=1}^{+\infty}\bigcup_{i=k}^{+\infty} R_i$$

Exercice 3. On dispose d'un jeu de 32 cartes.

1. On tire une carte au hasard. Quelle est la probabilité d'obtenir un as ? d'obtenir un pique ? d'obtenir l'as de pique ?
2. On tire simultanément 3 cartes au hasard. Quelle est la probabilité d'obtenir au moins un as ? au moins un pique ? au moins un as et un pique ?

Exercice 4. Une urne contient une boule blanche et une boule rouge.

On tire dans cette urne une boule, on note sa couleur et on la remet dans l'urne accompagnée de deux autres boules de la même couleur puis on répète l'opération.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Quelle est la probabilité p_n que les n premières boules tirées soient rouges ?
2. En utilisant une série, montrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} \ln\left(\frac{1}{p_n}\right) = +\infty$.
3. En déduire la limite de (p_n) lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice 5. Un joueur, disposant d'une pièce bien équilibrée, joue au jeu suivant :

1. à la première étape, il lance une fois la pièce ; s'il obtient *pile*, il gagne la partie et le jeu s'arrête et, sinon, il passe à la deuxième étape ;
2. à la deuxième étape, il lance deux fois la pièce ; s'il obtient deux fois *pile*, il gagne la partie et le jeu d'arrête et, sinon, il passe à la troisième étape ;
3. on continue ainsi, sachant qu'à la k-ème étape, le joueur lance k fois la pièce et gagne s'il obtient k fois *pile*.

On note, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, A_n : « le joueur n'a toujours pas gagné la partie à l'issue de la n-ième étape ».

1. Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la probabilité p_n de l'évènement A_n.
2. En utilisant une série, montrer que la suite $\left(\ln\left(\frac{1}{p_n}\right)\right)$ converge.
3. En déduire que (p_n) converge vers une limite $\ell > 0$.

Exercice 6. Deux archers tirent chacun leur tour sur une cible. Le premier qui touche la cible a gagné et le jeu s'arrête. Le joueur qui commence a la probabilité $p_1 \in]0\,;1[$ de toucher à chaque tour et le second la probabilité $p_2 \in]0\,;1[$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note A_n : « la cible est atteinte au tour numéro n ».

1. Calculer $\mathbf{P}(A_1)$, $\mathbf{P}(A_2)$ et $\mathbf{P}(A_3)$.
2. On note J_1 l'évènement « le premier joueur gagne ». Exprimer J_1 en fonction des évènements A_n et en déduire la probabilité que le premier joueur gagne.
3. Calculer $\mathbf{P}(J_2)$, la probabilité que le second joueur gagne.
4. Montrer que le jeu se termine avec une probabilité égale à 1.
5. Si $p_1 = p_2$, le jeu est-il équilibré ?

Exercice 7. Un tricheur dispose de 4 pièces : 3 pièces habituelles bien équilibrées et une pièce, truquée, possèdant deux côtés *pile*. Il prend une pièce au hasard et la lance. On note T l'évènement « la pièce est truquée » et A l'évènement « on obtient *pile* lors du lancer ».

1. **a.** Quelle est la probabilité de T ?

   b. Si la pièce est truquée, quelle la probabilité d'obtenir *pile* ?

   c. Quelle est la probabilité de choisir la pièce truquée et d'obtenir *pile* ?

   d. Quelle est la probabilité d'obtenir *pile* ?
2. Le tricheur a obtenu *pile*. Déterminer la probabilité que ce soit avec la pièce truquée.

3. Le tricheur parie qu'il va obtenir *pile*. S'il obtient pile, il gagne a euros, sinon il perd 1 euro. On note G la variable aléatoire égale à son gain algébrique.
   a. Quelle est la loi de G et quelle est son espérance ?
   b. Comment choisir a pour que le jeu reste équitable même avec la pièce truquée ?

Exercice 8. Dans une maison, deux pièces (une chambre A et un salon B) sont reliées entre elles de la manière suivante : A s'ouvre sur B et B s'ouvre sur l'extérieur. Une guêpe, initialement dans la pièce A, voudrait sortir à l'air libre. À chaque instant $n \in \mathbb{N}^*$, son trajet obéit aux règles suivantes :

- si elle est dans la pièce A à l'instant n, alors à l'instant $n+1$, elle reste en A avec une probabilité $\dfrac{1}{3}$ et, sinon, elle passe dans la pièce B ;
- si elle est dans la pièce B à l'instant n, alors à l'instant $n+1$, elle retourne en A avec une probabilité $\dfrac{1}{4}$, elle reste en B avec une probabilité $\dfrac{1}{2}$ ou elle sort à l'air libre avec une probabilité $\dfrac{1}{4}$.
- Enfin, lorsqu'elle est à l'air libre, elle ne revient plus dans la maison.

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on note A_n : « la guêpe est dans la pièce A à l'instant n », B_n : « la guêpe est dans la pièce B à l'instant n », D_n : « la guêpe est dehors à l'instant n » et S_n : « la guêpe sort entre l'instant n et l'instant $n+1$ », et on note a_n, b_n, d_n et s_n leurs probabilités respectives.

1. Déterminer les probabilités de a_1, b_1, s_1, a_2, b_2, s_2.
2. Sachant qu'à l'instant 2, la guêpe est en A, quelle est la probabilité qu'elle aille en B à l'instant 3 ?
3. Déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, une relation entre a_{n+1}, a_n et b_n d'une part et entre b_{n+1}, a_n et b_n d'autre part.
4. Justifier que, pour tout entier $n \geqslant 2$, $b_n = 2a_n$.
5. En déduire, pour tout entier $n \geqslant 2$, l'expression de a_n et b_n en fonction de n.
6. Déterminer la probabilité que la guêpe soit dehors à l'instant 10.
7. Déterminer les limites de (a_n) et (b_n) quand n tend vers $+\infty$ et interpréter ce résultat.
8. Justifier que pour tout entier $n \geqslant 2$, $s_n = \dfrac{1}{4}b_n$ et en déduire s_n en fonction de n.

Exercice 9. On considère un joueur de fléchettes qui, à chaque fois qu'il lance une fléchette, a une chance sur 1 000 d'atteindre le centre de la cible. On suppose que les lancers sont indépendants.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note T_n : « le joueur atteint le centre de la cible au n-ième lancer ».
   a. Décrire en français l'évènement $T = \bigcup_{n=1}^{+\infty} T_n$.
   b. Expliquer pourquoi calculer $\mathbf{P}(T)$ à l'aide de la question précédente n'est pas simple (et on ne demande pas de la faire).
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note S_n : « le joueur atteint le centre de la cible pour la première fois au n-ième lancer ».
   a. Décrire en français l'évènement $S = \bigcup_{n=1}^{+\infty} S_n$.
   b. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, déterminer $\mathbf{P}(S_n)$.
   c. En déduire $\mathbf{P}(S)$. Interpréter ce résultat.

Exercice 10. Deux joueurs s'affrontent dans un jeu de dés. La règle est la suivante : un des joueurs lance deux dés cubiques bien équilibrés ; si la somme des nombres obtenus est 5, le joueur a gagne, si la somme des nombres obtenus est 7, le joueur b gagne et, dans les autres cas, on relance les dés. On continue ainsi jusqu'à ce qu'un des joueurs gagne.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note A_n : « le joueur a gagne lors du n-ième lancer » et B_n : « le joueur b gagne lors du n-ième lancer ». On note, de plus, A : « le joueur a gagne le jeu » et B : « le joueur b gagne le jeu ».

1. Déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la probabilité de A_n.

2. Exprimer A à l'aide des évènements A_n ($n \in \mathbb{N}^*$) et en déduire la probabilité de A.

3. Déterminer, de la même façon, la probabilité de B.

4. Quelle est la probabilité que le jeu s'arrête ?

Exercice 11. Un athlète tente de franchir des haies successives numérotées 1, 2, 3, ..., n, etc. L'athlète est éliminé à son premier échec. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on suppose que la probabilité que l'athlète franchisse la haie numéro n sachant qu'il a franchi les haies précédentes est $\dfrac{1}{n}$. On note E_n : « l'athlète est éliminé à la n-ième haie ».

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la probabilité de l'évènement E_n est égale à $\dfrac{n-1}{n!}$.

2. Calculer $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \mathbf{P}(E_n)$. Que peut-on en déduire ?

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, préciser la probabilité h_n de franchir exactement n haies. En déduire la moyenne m du nombre de haies sautées avec succès, c'est-à-dire $m = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} n h_n$.

Exercice 12. Deux joueurs disposent chacun d'une pièce de monnaie bien équilibrée Ils lancent simultanément leurs pièces et répètent les lancers jusqu'à ce que l'un d'eux obtienne *pile*. On suppose que les lancers sont indépendants. Si les deux obtiennent *pile* pour la première fois au même lancer, la partie est dite nulle. Sinon, le premier joueur à obtenir *pile* gagne la partie.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note A_n : « le premier joueur obtient *pile* pour la première fois au n-ième lancer » et B_n : « le second joueur obtient *pile* pour la première fois au n-ième lancer ».

1. Déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la probabilité de A_n, celle de B_n et celle de $A_n \cap B_n$.

2. En déduire la probabilité que la partie soit nulle.

3. Quelle est la probabilité qu'il y ait un gagnant ?

Exercice 13. On dispose de n urnes numérotées de 1 à n. Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, dans l'urne numéro k, se trouvent k boules blanches et $n-k$ boules rouges.

1. On choisit au hasard une urne puis on tire simultanément deux boules au hasard dans cette urne. Quelle est la probabilité d'avoir deux boules blanches ?

2. Même question si on tire les deux boules successivement et avec remise.

3. Quelle est la limite de ces probabilités quand n tend vers $+\infty$?

Exercice 14. On lance un dé cubique équilibré jusqu'à obtenir 6 pour la première fois. Déterminer la probabilité que tous les nombres obtenus soient pairs.