⧫ Chapitre 3. Séries à termes positifs

Dans tout le chapitre, N désigne un entier naturel.

I. — Définitions

1) Séries à termes positifs

Définition 1

Soit (u_n) une suite à termes positifs définie à partir du rang N. Pour tout entier $n \geqslant N$, on pose $S_n = \sum_{k=N}^{n} u_k$.

1. La suite (S_n) est appelée la **série** de terme général u_n. On la note $\sum u_n$ (ou $\sum_{n \geqslant N} u_n$).
2. Pour tout entier naturel $n \geqslant N$, S_n est appelée la **somme partielle** d'indice n de la série $\sum u_n$.

⚠ Contrairement à ce qui a été vu précédemment, $\sum u_n$ ne désigne par une somme mais une suite. Les sommes partielles, en revanche, sont des sommes.

Exemple 2.

1. $\sum 1$ est la série de terme général 1. Ses sommes partielles sont $S_0 = 1$, $S_1 = 1 + 1 = 2$, $S_2 = 1 + 1 + 1 = 3$ et, de manière générale, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_n = n + 1$.
2. $\sum n$ est la série de terme général n. Ses sommes partielles sont $S_0 = 0$, $S_1 = 0 + 1 = 1$, $S_2 = 0 + 1 + 2 = 3$ et, de manière générale, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_n = \dfrac{n(n+1)}{2}$.
3. $\sum n^2$ est la série de terme général n^2. Ses sommes partielles sont $S_0 = 0^2 = 0$, $S_1 = 0^2 + 1^2 = 1$, $S_2 = 0^2 + 1^2 + 2^2 = 5$ et, de manière générale, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_n = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.
4. $\sum \dfrac{1}{2^n}$ est la série de terme général $\dfrac{1}{2^n}$. Ses sommes partielles sont $S_0 = \dfrac{1}{2^0} = 1$, $S_1 = \dfrac{1}{2^0} + \dfrac{1}{2^1} = \dfrac{3}{2}$, $S_2 = \dfrac{1}{2^0} + \dfrac{1}{2^1} + \dfrac{1}{2^2} = \dfrac{7}{4}$ et, de manière générale, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_n = \dfrac{1 - \frac{1}{2^{n+1}}}{1 - \frac{1}{2}} = 2\left[1 - \dfrac{1}{2^{n+1}}\right] = 2 - \dfrac{1}{2^n}$.
5. $\sum_{n \geqslant 1} \dfrac{1}{n}$ est la série de terme général $\dfrac{1}{n}$. Ses sommes partielles sont $S_1 = \dfrac{1}{1} = 1$, $S_2 = \dfrac{1}{1} + \dfrac{1}{2} = \dfrac{3}{2}$, $S_3 = \dfrac{1}{1} + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} = \dfrac{11}{6}$.
6. $\sum \dfrac{3^n}{n!}$ est la série de terme général $\dfrac{3^n}{n!}$. Ses sommes partielles sont $S_0 = \dfrac{3^0}{0!} = 1$, $S_1 = \dfrac{3^0}{0!} + \dfrac{3^1}{1!} = 4$, $S_2 = \dfrac{3^0}{0!} + \dfrac{3^1}{1!} + \dfrac{3^2}{2!} = \dfrac{17}{2}$.

2) Somme d'une série à termes positifs

Théorème et définition 3

Soit $\sum_{n \geqslant N} u_n$ une série à termes positifs. Alors, la suite des sommes partielles (S_n) admet une limite finie ou infinie. Cette limite s'appelle la **somme** de la série $\sum_{n \geqslant N} u_n$ et on la note $\sum_{n=N}^{+\infty} u_n$.

Démonstration. Pour tout entier $n \geqslant N$, $S_{n+1} - S_n = \sum_{k=N}^{n+1} u_k - \sum_{k=N}^{n} u_k = u_{n+1} \geqslant 0$ car (u_n) est à termes positifs. Ainsi, (S_n) est croissante. Dès lors, par le théorème des suites monotones, soit (S_n) est majorée et alors elle converge vers une limite finie ℓ soit (S_n) n'est pas majorée et alors elle diverge vers $+\infty$. $\square$

Les notations $\sum u_n$, $\sum_{n \geqslant N} u_n$, $\sum_{k=N}^{n} u_k$ et $\sum_{n=N}^{+\infty} u_n$ se ressemblent mais désignent des objets différents. Précisément, $\sum u_n$ et $\sum_{n \geqslant N} u_n$ désignent la série de terme général u_n, c'est-à-dire une suite, $\sum_{k=N}^{n} u_k$ désigne la somme partielle d'indice n, c'est-à-dire un nombre et $\sum_{n=N}^{+\infty} u_n$ désigne la somme de la série de terme général u_n, c'est-à-dire une limite qui peut être un nombre réel positif ou $+\infty$.

Exemple 4. Déterminer les sommes des séries $\sum 1$, $\sum n$, $\sum n^2$ et $\sum \frac{1}{2^n}$.

Solution.

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=0}^{n} 1 = n + 1 \xrightarrow[n \to +\infty]{} = +\infty$ donc $\sum_{n=0}^{+\infty} 1 = +\infty$.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2} \xrightarrow[n \to +\infty]{} = +\infty$ donc $\sum_{n=0}^{+\infty} n = +\infty$.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \xrightarrow[n \to +\infty]{} = +\infty$ donc $\sum_{n=0}^{+\infty} n^2 = +\infty$.
- On a vu dans l'exemple 2 que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k} = 2 - \frac{1}{2^n} = 2 - \left(\frac{1}{2}\right)^n$. Or, comme

$-1 < \frac{1}{2} < 1$, $\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$ donc, par somme de limites, $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n} = 2$.

Définition 5

Soit a un réel positif et λ un réel strictement positif. Alors, on pose

1. $(+\infty) + a = a + (+\infty) = +\infty$ **2.** $(+\infty) + (+\infty) = +\infty$ **3.** $\lambda(+\infty) = +\infty$.

Propriété 6. — linéarité de la somme

Soit $\sum_{n\geqslant N} u_n$ et $\sum_{n\geqslant N} v_n$ deux séries à termes positifs et $\lambda > 0$. Alors,

1. $\sum_{n=N}^{+\infty}(u_n+v_n) = \sum_{n=N}^{+\infty} u_n + \sum_{n=N}^{+\infty} v_n$ **2.** $\sum_{n=N}^{+\infty}(\lambda u_n) = \lambda \sum_{n=N}^{+\infty} u_n$.

Démonstration.

1. Supposons que les deux séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ tend vers des limites finies. Par linéarité de la somme finie, pour tout $n \geqslant N$,

$$\sum_{k=N}^{n}(u_k+v_k) = \sum_{k=N}^{n} u_k + \sum_{k=N}^{n} v_k \xrightarrow[n\to+\infty]{} \sum_{k=N}^{+\infty} u_k + \sum_{k=N}^{+\infty} v_k$$

par somme de limites. Ainsi, $\sum_{n=N}^{+\infty}(u_n+v_n) = \sum_{n=N}^{+\infty} u_n + \sum_{n=N}^{+\infty} v_n$.
Supposons à présent que l'une des deux séries tendent vers $+\infty$. Alors, par le même raisonnement, quelle que soit la somme de l'autre série, $\sum_{k=N}^{n}(u_k+v_k) \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$. Or, par la définition précédente, puisque l'une des deux séries à une somme égale à $+\infty$, $\sum_{k=N}^{+\infty} u_k + \sum_{k=N}^{+\infty} v_k = +\infty$, ce qui montre l'égalité voulue.

2. Pour tout entier $n \geqslant N$, $\sum_{k=N}^{n}(\lambda u_k) = \lambda \sum_{k=N}^{n} u_k \xrightarrow[n\to+\infty]{} \lambda \sum_{k=N}^{+\infty} u_k$ (grâce à la définition précédente dans le cas $\sum_{n=N}^{+\infty} u_n = +\infty$). Ainsi, $\sum_{n=N}^{+\infty}(\lambda u_n) = \lambda \sum_{n=N}^{+\infty} u_n$.

□

Exemple 7. Déterminer les sommes des séries $\sum(n^2+1)$ et $\sum \frac{5}{2^n}$.

Solution. En utilisant les résultats de l'exemple 4,
$\sum_{n=0}^{+\infty}(n^2+1) = \sum_{n=0}^{+\infty} n^2 + \sum_{n=0}^{+\infty} 1 = +\infty + (+\infty) = +\infty$.
$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{5}{2^n} = 5\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n} = 5 \times 2 = 10$.

II. — Nature d'une série

1) Définition

Définition 8

On dit qu'une série à termes positifs **converge** (ou est convergente) si sa somme est finie.
Dans le cas contraire, on dit qu'elle **diverge** (ou qu'elle est divergente).
La caractère convergent ou divergent d'une série s'appelle la **nature** de la série.

Exemple 9. Parmi les séries de l'exemple 4, lesquelles sont convergentes et lesquelles sont divergentes ?

Solution. Les séries $\sum 1$, $\sum n$ et $\sum n^2$ sont divergentes et la série $\sum \dfrac{1}{2^n}$ est convergente.

Remarque 10. Il découle de la linéarité de la somme que :

- si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ convergent alors $\sum(u_n + v_n)$ converge ;
- si $\sum u_n$ ou $\sum v_n$ diverge alors $\sum(u_n + v_n)$ diverge ;
- pour tout réel $\lambda > 0$, $\sum u_n$ et $\sum \lambda u_n$ ont la même nature.

2) Comportement du terme général

Propriété 11

1. Si la série $\sum u_n$ converge alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.
2. Si (u_n) ne tend pas vers 0 alors $\sum u_n$ diverge. Dans ce cas, on dit que $\sum u_n$ diverge grossièrement.

Démonstration.

1. Supposons que $\sum u_n$ converge et notons S sa somme. Alors, d'une part, pour tout $n \geqslant N+1$, $u_n = \sum\limits_{k=N}^{n} u_k - \sum\limits_{k=N}^{n-1} u_k$ et, d'autre part, $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum_{k=N}^{n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \sum_{k=N}^{n-1} = S$ donc, par différence de limites, (u_n) converge et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = S - S = 0$.
2. Cela découle immédiatement de l'implication précédente.

□

Exemple 12. Déterminer la nature des séries $\sum \dfrac{n!}{2^n}$, $\sum \dfrac{n-1}{n}$ et $\sum\limits_{n\geqslant 2} \dfrac{n}{\ln(n)}$.

Solution.

Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{n!}{2^n} = \dfrac{1\times 2\times 3\times\cdots\times n}{2^n} = \dfrac{1}{2}\times\dfrac{2}{2}\times\dfrac{3}{2}\times\cdots\times\dfrac{n}{2} \geqslant \dfrac{1}{2}\times 1\times 1\times\cdots\times 1 = \dfrac{1}{2}$ donc la suite de terme général $\dfrac{n!}{2^n}$ ne tend pas vers 0 et ainsi la série $\sum \dfrac{n!}{2^n}$ diverge grossièrement.

Comme $\dfrac{n-1}{n} \sim \dfrac{n}{n} \sim 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n-1}{n} = 1 \neq 0$ donc la série $\sum \cos^2(n)$ diverge grossièrement.

Par croissance comparée, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n}{\ln(n)} = +\infty$ donc la série $\sum \dfrac{n}{\ln(n)}$ diverge grossièrement.

3) Comparaison des termes généraux

Propriété 13

Soit (u_n) et (v_n) deux suites à termes positifs définies à partir du rang N. On suppose qu'il existe un entier $M \geqslant N$ tel que, pour tout $n \geqslant M$, $u_n \leqslant v_n$.

1. Si la série $\sum\limits_{n\geqslant N} u_n$ diverge alors $\sum\limits_{n\geqslant N} v_n$ diverge.
2. Si la série $\sum\limits_{n\geqslant N} v_n$ converge alors $\sum\limits_{n\geqslant N} u_n$ converge.
3. Si, de plus, $M = N$ alors, dans tous les cas, $\sum\limits_{n=N}^{+\infty} u_n \leqslant \sum\limits_{n=N}^{+\infty} v_n$.

Démonstration. Par la relation de Chasles, pour tout $n \geqslant M$,

$$\sum_{k=N}^{n} u_k = \sum_{k=N}^{M-1} u_k + \sum_{k=M}^{n} u_k \leqslant \sum_{k=N}^{M-1} u_k + \sum_{k=M}^{n} v_k = \sum_{k=N}^{M-1} (u_k - v_k) + \sum_{k=N}^{n} v_k \qquad (*)$$

1. Supposons que $\sum\limits_{n\geqslant N} u_n$ diverge. Alors, pour tout $n \geqslant M$,
$$\sum_{n=N}^{n} v_k = \sum_{k=N}^{n} u_k - \underbrace{\sum_{k=N}^{M-1} (u_k - v_k)}_{\text{constante}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$$
donc, par le théorème de comparaison sur les suites, $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{n=N}^{n} v_k = +\infty$ et ainsi $\sum v_n$ diverge.
2. Supposons que $\sum\limits_{n\geqslant N} v_n$ converge. Alors, la suite des sommes partielles $\left(\sum\limits_{k=N}^{n} v_k\right)$ est majorée donc, d'après $(*)$, la suite des sommes partielles $\left(\sum\limits_{k=N}^{n} u_k\right)$ est également majorée et donc la série $\sum u_n$ converge.
3. Si $M = N$ alors $(*)$ devient : pour tout $n \geqslant N$, $\sum\limits_{k=N}^{n} u_k \leqslant \sum\limits_{k=N}^{n} v_k$ et par conservation des inégalités larges par passage à la limite, on en déduit que $\sum\limits_{k=N}^{+\infty} u_k \leqslant \sum\limits_{k=N}^{+\infty} v_k$.

$\square$

Exemple 14. Déterminer la nature des séries $\sum \dfrac{1}{2^n+1}$ et $\sum\limits_{n\geqslant 2} \dfrac{n+\sqrt{n}}{\ln(n)}$.

Solution. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $2^n + 1 \geqslant 2^n > 0$ donc, par décroissante de la fonction inverse sur $]0\,;+\infty[$, $\dfrac{1}{2^n+1} \leqslant \dfrac{1}{2^n}$. Or, on a vu (exemple 4) que la série $\sum \dfrac{1}{2^n}$ converge donc, par le théorème de comparaison, $\sum \dfrac{1}{2^n+1}$ converge également.

Pour tout entier $n \geqslant 2$, $n+\sqrt{n} \geqslant n$ et $\ln(n) > 0$ donc $\dfrac{n+\sqrt{n}}{\ln(n)} \geqslant \dfrac{n}{\ln(n)}$. Or, on a vu (exemple 12) que $\sum \dfrac{n}{\ln(n)}$ diverge donc, par le théorème de comparaison, $\sum \dfrac{n+\sqrt{n}}{\ln(n)}$ diverge également.

4) Équivalence des termes généraux

Propriété 15

Soit (u_n) et (v_n) deux suites à termes positifs. Si $u_n \sim v_n$ alors les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ ont la même nature.

Démonstration. Supposons que $u_n \sim v_n$. Alors, $\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1$ donc la suite de terme général $\varepsilon_n := \frac{u_n}{v_n} - 1$ tend vers 0. Ainsi, $u_n = (1+\varepsilon_n)v_n$ avec $\lim_{n\to+\infty} \varepsilon_n = 0$.

Supposons que $\sum v_n$ converge. Alors, comme (ε_n) tend vers 0, il existe un rang M tel que, pour tout $n \geqslant M$, $\varepsilon_n \leqslant 1$. Dès lors, pour tout $n \geqslant M$, $u_n \leqslant 2v_n$. Or, comme $\sum v_n$ converge, par la remarque 10, $\sum 2v_n$ converge et donc, par le théorème de comparaison, $\sum u_n$ converge.

Supposons que $\sum v_n$ diverge. Alors, comme (ε_n) tend vers 0, il existe un rang M tel que, pour tout $n \geqslant M$, $\varepsilon_n \geqslant -\frac{1}{2}$. Dès lors, pour tout $n \geqslant M$, $u_n \geqslant \frac{1}{2}v_n$. Or, comme $\sum v_n$ diverge, par la remarque 10, $\sum \frac{1}{2}v_n$ diverge et donc, par le théorème de comparaison, $\sum u_n$ diverge.

Enfin, étant donné que $v_n \sim u_n$, on peut reprendre ce qui précède en échangeant le rôle de (u_n) et (v_n) et on conclut que (u_n) et (v_n) ont la même nature. $\square$

Exemple 16. Déterminer la nature des séries $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{2^n-1}$ et $\sum_{n\geqslant 2} \frac{n-\sqrt{n}}{\ln(n)}$.

Solution.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{\frac{1}{2^n}}{\frac{1}{2^n-1}} = \frac{2^n-1}{2^n} = 1 - \frac{1}{2^n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$ donc $\frac{1}{2^n-1} \sim \frac{1}{2^n}$. Or, on a vu dans l'exemple 4 que la série $\sum \frac{1}{2^n}$ converge donc $\sum \frac{1}{2^n-1}$ converge.

Pour tout entier $n \geqslant 2$, $\frac{\frac{n-\sqrt{n}}{\ln(n)}}{\frac{n}{\ln(n)}} = \frac{n-\sqrt{n}}{n} = 1 - \frac{1}{\sqrt{n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$ donc $\frac{n-\sqrt{n}}{\ln(n)} \sim \frac{n}{\ln(n)}$. Or, on a vu dans l'exemple 12 que $\sum \frac{n}{\ln(n)}$ diverge donc $\frac{n-\sqrt{n}}{\ln(n)}$ diverge.

Remarque 17. On en déduit en particulier que la nature d'une série ne dépend pas de ses premiers termes. Ainsi, si M et N sont deux entiers naturels alors les séries $\sum_{n\geqslant N} u_n$ et $\sum_{n\geqslant M} u_n$ ont la même nature. Si elles divergent, leurs sommes sont tous les deux égales à $+\infty$. En revanche, si elles convergent, il n'y a pas de raison qu'elles aient la même somme. Par exemple, $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n} = 2$ mais $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n} - \frac{1}{2^0} = 1$.

III. — Séries de référence

1) Séries de Riemann

Théorème 18

La série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n}$ est divergente.

Démonstration. Soit $k \in \mathbb{N}^*$ et $t \in [k\,;k+1]$. Alors, par décroissance de la fonction inverse sur $]0\,;+\infty[$, $\dfrac{1}{t} \leqslant \dfrac{1}{k}$. Par croissance de l'intégrale, on en déduit que

$$\int_k^{k+1} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t \leqslant \int_k^{k+1} \frac{1}{k}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{k}(k+1-k) = \frac{1}{k}.$$

Or,

$$\int_k^{k+1} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t = [\ln(t)]_k^{k+1} = \ln(k+1) - \ln(k)$$

donc, pour tout entier $k \geqslant 1$, $\dfrac{1}{k} \geqslant \ln(k+1) - \ln(k)$. Il s'ensuit, en reconnaissant une somme téléscopique, que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \geqslant \sum_{k=1}^{n} \ln(k+1) - \ln(k) = \ln(n+1).$$

Mais $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln(n+1) = +\infty$ donc, par comparaison, $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k} = +\infty$ et ainsi la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{n}$ est divergente. □

Exemple 19. Déterminer la nature des séries $\sum\limits_{n\geqslant 2} \dfrac{1}{\ln(n)}$, $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ et $\sum\limits_{n\geqslant 1} \ln\left(1+\dfrac{2}{n}\right)$.

Solution.

Pour tout entier $n \geqslant 2$, $0 < \ln(n) \leqslant n$ donc, par décroissance de la fonction inverse sur $]0\,;+\infty[$, $\dfrac{1}{\ln(n)} \geqslant \dfrac{1}{n}$. Or, la série $\sum \dfrac{1}{n}$ diverge donc, par le théorème de comparaison, $\sum \dfrac{1}{\ln(n)}$ diverge également.

Pour tout entier $n \geqslant 1$, $0 < \sqrt{n}) \leqslant n$ donc, par décroissance de la fonction inverse sur $]0\,;+\infty[$, $\dfrac{1}{\sqrt{n}} \geqslant \dfrac{1}{n}$. Or, la série $\sum \dfrac{1}{n}$ diverge donc, par le théorème de comparaison, $\sum \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ diverge également.

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2}{n} = 0$, $\ln\left(1+\dfrac{2}{n}\right) \sim \dfrac{2}{n}$. Or, comme $\sum \dfrac{1}{n}$ diverge, par la remarque 10, $\sum \dfrac{2}{n}$ diverge et donc, par équivalence des termes généraux, $\sum \ln\left(1+\dfrac{2}{n}\right)$ diverge.

Remarque 20. La série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{n}$ montre que la réciproque du point **1.** de la propriété 11 est fausse : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = 0$ mais la série $\sum \dfrac{1}{n}$ diverge.

Théorème 21

La série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{n^2}$ est convergente.

Démonstration. Pour tout entier $n \geqslant 2$, $0 < n-1 < n$ donc, en multipliant n, $0 < n(n-1) < n^2$. Ainsi, par décroissance de la fonction inverse sur $]0\,;+\infty[$, $\dfrac{1}{n(n-1)} \geqslant \dfrac{1}{n^2}$. Or, pour tout entier $k \geqslant 2$, $\dfrac{1}{nk(k-1)} = \dfrac{1}{k-1} - \dfrac{1}{k}$ donc, pour tout entier $n \geqslant 2$,

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{n(n-1)} = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} = 1 - \frac{1}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1.$$

Ainsi, la série de terme général $\dfrac{1}{n(n-1)}$ converge donc, par le théorème de comparaison, la série de terme général $\dfrac{1}{n^2}$ converge. □

Remarque 22. Le mathématicien suisse L. Euler a démontré en 1735 que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

Exemple 23. Déterminer la nature des séries $\displaystyle\sum \frac{1}{n^2+1}$, $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^3}$ et $\displaystyle\sum \frac{\sqrt{n}}{n^3+1}$.

Solution.
$\dfrac{1}{n^2+1} \sim \dfrac{1}{n^2}$ donc, comme $\sum \dfrac{1}{n^2}$ converge, par équivalence des termes généraux, $\sum \dfrac{1}{n^2+1}$ converge.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $0 < n^2 \leqslant n^3$ donc, par décroissance de la fonction inverse sur $]0\,;+\infty[$, $\dfrac{1}{n^2} \geqslant \dfrac{1}{n^3}$. Or, $\sum \dfrac{1}{n^2}$ converge donc, par le théorème de comparaison, $\sum \dfrac{1}{n^3}$ converge.

Comme $n^3+1 \sim n^3$, $\dfrac{\sqrt{n}}{n^3+1} \sim \dfrac{\sqrt{n}}{n^3}$ donc la série $\sum \dfrac{\sqrt{n}}{n^3+1}$ a la même nature que la série $\sum \dfrac{\sqrt{n}}{n^3}$. Or, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{\sqrt{n}}{n^3} = \dfrac{\sqrt{n}}{n} \times \dfrac{1}{n^2} = \dfrac{1}{\sqrt{n}} \times \dfrac{1}{n^2} \leqslant \dfrac{1}{n^2}$ car $\sqrt{n} \geqslant 1$. Par propriété, $\sum \dfrac{1}{n^2}$ converge donc, par comparaison, la série $\sum \dfrac{\sqrt{n}}{n^3}$ converge et ainsi la série $\sum \dfrac{\sqrt{n}}{n^3+1}$.

Remarque 24. Une série de Riemann est une série de la forme $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^\alpha}$ où α est un réel. Les deux exemples précédents montrent qu'une telle série converge pour $\alpha = 2$ mais diverge pour $\alpha = 1$.

2) Séries géométrique et séries géométriques dérivées

Définition 25

Une série géométrique est une série de la forme $\sum q^n$ avec $q \in \mathbb{R}_+$.

Exemple 26. Les séries $\sum 3^n$, $\sum \dfrac{1}{7^n}$ et $\sum \dfrac{4^n}{5^n}$ sont des séries géométriques.

Propriété 27

Soit $q \in \mathbb{R}_+$. La série géométrique $\sum q^n$ converge si et seulement si $q \in [0\,;1[$ et, dans ce cas,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \frac{1}{1-q}.$$

Démonstration. Soit $n \in \mathbb{N}$.

Si $q \geqslant 1$ alors $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} q^n \sum_{k=0}^{n} 1 = n+1 \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ donc la série $\sum q^n$ diverge.

Si $q < 1$ alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} q^n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$. Or, comme $0 \leqslant q < 1$, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} q^n = 0$ donc, par opérations sur les limites, la série de terme général q^n converge et $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$. □

Exemple 28. Déterminer la nature et la somme des séries de l'exemple 26

Solution. Comme $2 \geqslant 1$, la série $\sum 2^n$ diverge donc $\sum_{n=0}^{+\infty} 2^n = +\infty$.

Comme $0 \leqslant \frac{1}{7} < 1$, la série $\sum \left(\frac{1}{7}\right)^n$ i.e. $\sum \frac{1}{7^n}$ converge et $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{7^n} = \frac{1}{1-\frac{1}{7}} = \frac{7}{6}$.

Comme $0 \leqslant \frac{4}{5} < 1$, la série $\sum \left(\frac{4}{5}\right)^n$ i.e. $\sum \frac{4^n}{5^n}$ converge et $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{4^n}{5^n} = \frac{1}{1-\frac{4}{5}} = 5$.

Propriété 29

Soit $q \in \mathbb{R}_+$. La série $\sum nq^{n-1}$ converge si et seulement si $q \in [0\,;1[$ et, dans ce cas,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} nq^{n-1} = \frac{1}{(1-q)^2}.$$

Démonstration. Supposons $q \geqslant 1$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $nq^{n-1} \geqslant n$ et la série de terme général n diverge (voir exemple 4) donc $\sum nq^{n-1}$ diverge.

Pour tout $q \in [0\,;1[$ et tout $n \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$. En dérivant par rapport à q, on en déduit que, pour tout $q \in [0\,;1[$ et tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=0}^{n} kq^{k-1} = \frac{(-(n+1)q^n)(1-q) - (1-q^{n+1})(-1)}{(1-q)^2} = \frac{1+nq^{n+1}-(n+1)q^n}{(1-q)^2}$$

Or, comme $0 \leqslant q < 1$, par croissance comparée, $\lim_{n\to+\infty} nq^{n+1} = \lim_{n\to+\infty} (n+1)q^n = 0$ donc la série de terme général nq^{n-1} converge et $\sum_{n=0}^{+\infty} nq^{n-1} = \frac{1}{(1-q)^2}$. □

Remarque 30. On peut faire commencer la somme à $n = 1$ car le premier terme de la série est nul.

Exemple 31. Déterminer la nature et la somme des séries $\sum n3^n$, $\sum \frac{n}{7^n}$ et $\sum \frac{(n+1)4^n}{5^n}$.

Solution. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n3^n = 3(n3^{n-1})$ et $3 > 1$, la série de terme général $n3^n$ diverge donc $\sum_{n=0}^{+\infty} n3^n = +\infty$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\frac{n}{7^n} = \frac{1}{7} \times n\left(\frac{1}{7}\right)^{n-1}$ et $0 \leqslant \frac{1}{7} < 1$ donc la série converge et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n}{7^n} = \frac{1}{(1-\frac{1}{7})^2} = \frac{1}{7} \times \frac{49}{36} = \frac{7}{36}.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\frac{(n+1)4^n}{5^n} = \frac{4}{5} \times n\left(\frac{4}{5}\right)^{n-1} + \left(\frac{4}{5}\right)^n$. Comme $0 \leqslant \frac{4}{5} < 1$, les deux séries de termes généraux $n\left(\frac{4}{5}\right)^{n-1}$ et $\left(\frac{4}{5}\right)^n$ convergent donc la série converge et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n+1)4^n}{5^n} = \frac{4}{5} \times \frac{1}{(1-\frac{4}{5})^2} + \frac{1}{1-\frac{4}{5}} = \frac{4}{5} \times 25 + 5 = 25.$$

Propriété 32

Soit $q \in \mathbb{R}_+$. La série $\sum n(n-1)q^{n-2}$ converge si et seulement si $q \in [0\,;1[$ et, dans ce cas,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)q^{n-2} = \frac{2}{(1-q)^3}.$$

Démonstration. Supposons $q \geqslant 1$. Pour tout entier $n \geqslant 2$, $n(n-1)q^{n-2} \geqslant n$ et la série de terme général n diverge (voir exemple 4) donc $\sum n(n-1)q^{n-2}$ diverge.

Pour tout $q \in [0\,;1[$ et tout $n \in \mathbb{N}$, on a vu que

$$\sum_{k=0}^{n} kq^{nk-1} = \frac{1+nq^{n+1}-(n+1)q^n}{(1-q)^2}.$$

En dérivant par rapport à q, on en déduit que

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} k(k-1)q^{k-2} &= \frac{(n(n+1)q^n - n(n+1)q^{n-1})(1-q)^2 - (1+nq^{n+1}-(n+1)q^n)\times 2(-1)(1-q)}{(1-q)^4} \\
&= \frac{(n(n+1)q^n - n(n+1)q^{n-1})(1-q) + 2(1+nq^{n+1}-(n+1)q^n)}{(1-q)^3} \\
&= \frac{2-n(n-1)q^{n+1}+2(n^2-1)q^n - n(n+1)q^{n-1}}{(1-q)^3}
\end{aligned}$$

Or, comme $0 \leqslant q < 1$, par croissance comparée, $\lim_{n\to+\infty} n(n+1)q^{n+1} = \lim_{n\to+\infty} (n^2-1)q^n = \lim_{n\to+\infty} n(n+1)q^{n-1} = 0$ donc la série de terme général $n(n-1)q^{n-2}$ converge et $\sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)q^{n-2} = \frac{2}{(1-q)^3}$. □

Remarque 33. On peut faire commencer la somme à $n=1$ ou à $n=2$ car les deux premiers termes de la série sont nuls.

Exemple 34. Déterminer la nature et la somme des séries $\sum n^2 3^{n-2}$, $\sum \frac{n(n-1)}{7^n}$ et $\sum \frac{n^2 4^n}{5^n}$.

Solution. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n^2 3^{n-2} \sim n(n-1)3^{n-2}$ et $3 > 1$ donc la série $\sum n(n-1)3^{n-2}$ diverge et, par équivalence des termes généraux, $\sum n^2 3^{n-2}$ aussi. Ainsi, $\sum_{n=0}^{+\infty} n^2 3^{n-2} = +\infty$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\frac{n(n-1)}{7^n} = \frac{1}{49} \times n(n-1)\left(\frac{1}{7}\right)^{n-2}$ donc, comme $0 \leqslant \frac{1}{7} < 1$, la série converge et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n(n-1)}{7^n} = \frac{1}{49} \times \frac{2}{(1-\frac{1}{7})^3} = \frac{1}{49} \times 2 \times \frac{343}{216} = \frac{7}{108}.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\frac{n^2 4^n}{5^n} \sim \left(\frac{4}{5}\right)^2 n(n-1)\left(\frac{4}{5}\right)^{n-2}$ donc, comme $0 \leqslant \frac{4}{5} < 1$, la série converge.

Pour calculer sa limite, on remarque que $n(n-1) = n^2 - n$ donc $n^2 = n(n-1) + n$ donc

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2 4^n}{5^n} &= \frac{16}{25} \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)\left(\frac{4}{5}\right)^{n-2} + \frac{4}{5} \sum_{n=0}^{+\infty} n \left(\frac{4}{5}\right)^{n-1} \\
&= \frac{16}{25} \times \frac{2}{(1-\frac{4}{5})^3} + \frac{4}{5} \times \frac{1}{(1-\frac{4}{5})^2} \\
&= \frac{16}{25} \times 250 + \frac{4}{5} \times 25 \\
&= 180
\end{aligned}$$

3) Séries exponentielles

Définition 35

Une série exponentielle est une série de la forme $\sum \frac{x^n}{n!}$ avec $x \in \mathbb{R}_+$.

Exemple 36. Les séries $\sum \frac{1}{n!}$, $\sum \frac{\sqrt{2}^n}{n!}$ et $\sum \frac{1}{2^n n!}$ sont des séries exponentielles.

Théorème 37. — admis

Pour tout réel x positif, la série exponentielle $\sum \frac{x^n}{n!}$ converge et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = \mathrm{e}^x.$$

Exemple 38. Calculer les sommes des séries de l'exemple 36.

Solution

$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1^n}{n!} = \mathrm{e}^1 = e.$

$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\sqrt{2}^n}{n!} = \mathrm{e}^{\sqrt{2}}.$

$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(\frac{1}{2})^n}{n!} = \mathrm{e}^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}.$