♦ Chapitre 3. Séries à termes positifs

Dans tout le chapitre, N désigne un entier naturel.

I. — Définitions

1) Séries à termes positifs

Définition 1

Soit (u_n) une suite à termes positifs définie à partir du rang N. Pour tout entier $n \geqslant N$, on pose $S_n = \sum_{k=N}^{n} u_k$.

1. La suite (S_n) est appelée la **série** de terme général u_n. On la note $\sum u_n$ (ou $\sum_{n \geqslant N} u_n$).

2. Pour tout entier naturel $n \geqslant N$, S_n est appelée la **somme partielle** d'indice n de la série $\sum u_n$.

Contrairement à ce qui a été vu précédemment, $\sum u_n$ ne désigne par une somme mais une suite. Les sommes partielles, en revanche, sont des sommes.

Exemple 2.

1. $\sum 1$ est la série de terme général 1. Ses sommes partielles sont $S_0 = 1$, $S_1 = 1 + 1 = 2$, $S_2 = 1 + 1 + 1 = 3$ et, de manière générale, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_n = n + 1$.
2. $\sum n$ est la série de terme général n. Ses sommes partielles sont $S_0 = 0$, $S_1 = 0 + 1 = 1$, $S_2 = 0 + 1 + 2 = 3$ et, de manière générale, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_n = \dfrac{n(n+1)}{2}$.
3. $\sum n^2$ est la série de terme général n^2. Ses sommes partielles sont $S_0 = 0^2 = 0$, $S_1 = 0^2 + 1^2 = 1$, $S_2 = 0^2 + 1^2 + 2^2 = 5$ et, de manière générale, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_n = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.
4. $\sum \dfrac{1}{2^n}$ est la série de terme général $\dfrac{1}{2^n}$. Ses sommes partielles sont $S_0 = \dfrac{1}{2^0} = 1$, $S_1 = \dfrac{1}{2^0} + \dfrac{1}{2^1} = \dfrac{3}{2}$, $S_2 = \dfrac{1}{2^0} + \dfrac{1}{2^1} + \dfrac{1}{2^2} = \dfrac{7}{4}$ et, de manière générale, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_n = \dfrac{1 - \frac{1}{2^{n+1}}}{1 - \frac{1}{2}} = 2\left[1 - \dfrac{1}{2^{n+1}}\right] = 2 - \dfrac{1}{2^n}$.
5. $\sum_{n \geqslant 1} \dfrac{1}{n}$ est la série de terme général $\dfrac{1}{n}$. Ses sommes partielles sont $S_1 = \dfrac{1}{1} = 1$, $S_2 = \dfrac{1}{1} + \dfrac{1}{2} = \dfrac{3}{2}$, $S_3 = \dfrac{1}{1} + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} = \dfrac{11}{6}$.
6. $\sum \dfrac{3^n}{n!}$ est la série de terme général $\dfrac{3^n}{n!}$. Ses sommes partielles sont $S_0 = \dfrac{3^0}{0!} = 1$, $S_1 = \dfrac{3^0}{0!} + \dfrac{3^1}{1!} = 4$, $S_2 = \dfrac{3^0}{0!} + \dfrac{3^1}{1!} + \dfrac{3^2}{2!} = \dfrac{17}{2}$.

2) Somme d'une série à termes positifs

Théorème et définition 3

Soit $\sum_{n\geqslant N} u_n$ une série à termes positifs. Alors, la suite des sommes partielles (S_n) admet une limite finie ou infinie. Cette limite s'appelle la **somme** de la série $\sum_{n\geqslant N} u_n$ et on la note $\sum_{n=N}^{+\infty} u_n$.

Les notations $\sum u_n$, $\sum_{n\geqslant N} u_n$, $\sum_{k=N}^{n} u_k$ et $\sum_{n=N}^{+\infty} u_n$ se ressemblent mais désignent des objets différents. Précisément, $\sum u_n$ et $\sum_{n\geqslant N} u_n$ désignent la série de terme général u_n, c'est-à-dire une suite, $\sum_{k=N}^{n} u_k$ désigne la somme partielle d'indice n, c'est-à-dire un nombre et $\sum_{n=N}^{+\infty} u_n$ désigne la somme de la série de terme général u_n, c'est-à-dire une limite qui peut être un nombre réel positif ou $+\infty$.

Exemple 4. Déterminer les sommes des séries $\sum 1$, $\sum n$, $\sum n^2$ et $\sum \frac{1}{2^n}$.

Définition 5

Soit a un réel positif et λ un réel strictement positif. Alors, on pose

1. $(+\infty) + a = a + (+\infty) = +\infty$ **2.** $(+\infty) + (+\infty) = +\infty$ **3.** $\lambda(+\infty) = +\infty$.

Propriété 6. — linéarité de la somme

Soit $\sum_{n\geqslant N} u_n$ et $\sum_{n\geqslant N} v_n$ deux séries à termes positifs et $\lambda > 0$. Alors,

1. $\sum_{n=N}^{+\infty}(u_n + v_n) = \sum_{n=N}^{+\infty} u_n + \sum_{n=N}^{+\infty} v_n$ **2.** $\sum_{n=N}^{+\infty}(\lambda u_n) = \lambda \sum_{n=N}^{+\infty} u_n$.

Exemple 7. Déterminer les sommes des séries $\sum(n^2+1)$ et $\sum \frac{5}{2^n}$.

II. — Nature d'une série

1) Définition

Définition 8

On dit qu'une série à termes positifs **converge** (ou est convergente) si sa somme est finie.
Dans le cas contraire, on dit qu'elle **diverge** (ou qu'elle est divergente).
La caractère convergent ou divergent d'une série s'appelle la **nature** de la série.

Exemple 9. Parmi les séries de l'exemple 4, lesquelles sont convergentes et lesquelles sont divergentes ?

Remarque 10. Il découle de la linéarité de la somme que :

- si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ convergent alors $\sum(u_n + v_n)$ converge ;
- si $\sum u_n$ ou $\sum v_n$ diverge alors $\sum(u_n + v_n)$ diverge ;
- pour tout réel $\lambda > 0$, $\sum u_n$ et $\sum \lambda u_n$ ont la même nature.

2) Comportement du terme général

Propriété 11

1. Si la série $\sum u_n$ converge alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

2. Si (u_n) ne tend pas vers 0 alors $\sum u_n$ diverge. Dans ce cas, on dit que $\sum u_n$ diverge grossièrement.

Exemple 12. Déterminer la nature des séries $\sum \dfrac{n!}{2^n}$, $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{n-1}{n}$ et $\sum\limits_{n\geqslant 2} \dfrac{n}{\ln(n)}$.

3) Comparaison des termes généraux

Propriété 13

Soit (u_n) et (v_n) deux suites à termes positifs définies à partir du rang N. On suppose qu'il existe un entier $M \geqslant N$ tel que, pour tout $n \geqslant M$, $u_n \leqslant v_n$.

1. Si la série $\sum\limits_{n\geqslant N} u_n$ diverge alors $\sum\limits_{n\geqslant N} v_n$ diverge.

2. Si la série $\sum\limits_{n\geqslant N} v_n$ converge alors $\sum\limits_{n\geqslant N} u_n$ converge.

3. Si, de plus, $M = N$ alors, dans tous les cas, $\sum\limits_{n=N}^{+\infty} u_n \leqslant \sum\limits_{n=N}^{+\infty} v_n$.

Exemple 14. Déterminer la nature des séries $\sum \dfrac{1}{2^n+1}$ et $\sum\limits_{n\geqslant 2} \dfrac{n+\sqrt{n}}{\ln(n)}$.

4) Équivalence des termes généraux

Propriété 15

Soit (u_n) et (v_n) deux suites à termes positifs. Si $u_n \sim v_n$ alors les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ ont la même nature.

Exemple 16. Déterminer la nature des séries $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{2^n-1}$ et $\sum\limits_{n\geqslant 2} \dfrac{n-\sqrt{n}}{\ln(n)}$.

Remarque 17. On en déduit en particulier que la nature d'une série ne dépend pas de ses premiers termes. Ainsi, si M et N sont deux entiers naturels alors les séries $\sum\limits_{n\geqslant N} u_n$ et $\sum\limits_{n\geqslant M} u_n$ ont la même nature. Si elles divergent, leurs sommes sont toutes les deux égales à $+\infty$. En revanche, si elles convergent, il n'y a pas de raison qu'elles aient la même somme. Par exemple, $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n} = 2$ mais $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n} - \frac{1}{2^0} = 1$.

III. — Séries de référence

1) Séries de Riemann

Théorème 18

La série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n}$ est divergente.

Exemple 19. Déterminer la nature des séries $\sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{\ln(n)}$, $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{\sqrt{n}}$ et $\sum_{n\geqslant 1} \ln\left(1+\frac{2}{n}\right)$.

Remarque 20. La série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n}$ montre que la réciproque du point **1.** de la propriété 11 est fausse : $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$ mais la série $\sum \frac{1}{n}$ diverge.

Théorème 21

La série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2}$ est convergente.

Remarque 22. Le mathématicien suisse L. Euler a démontré en 1735 que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

Exemple 23. Déterminer la nature des séries $\sum \frac{1}{n^2+1}$, $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^3}$ et $\sum \frac{\sqrt{n}}{n^3+1}$.

Remarque 24. Une série de Riemann est une série de la forme $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^\alpha}$ où α est un réel. Les deux exemples précédents montrent qu'une telle série converge pour $\alpha = 2$ mais diverge pour $\alpha = 1$.

2) Séries géométrique et séries géométriques dérivées

Définition 25

Une série géométrique est une série de la forme $\sum q^n$ avec $q \in \mathbb{R}_+$.

Exemple 26. Les séries $\sum 3^n$, $\sum \frac{1}{7^n}$ et $\sum \frac{4^n}{5^n}$ sont des séries géométriques.

Propriété 27

Soit $q \in \mathbb{R}_+$. La série géométrique $\sum q^n$ converge si et seulement si $q \in [0\,;1[$ et, dans ce cas,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \frac{1}{1-q}.$$

Exemple 28. Déterminer la nature et la somme des séries de l'exemple 26

Propriété 29

Soit $q \in \mathbb{R}_+$. La série $\sum nq^{n-1}$ converge si et seulement si $q \in [0\,;1[$ et, dans ce cas,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} nq^{n-1} = \frac{1}{(1-q)^2}.$$

Remarque 30. On peut faire commencer la somme à $n=1$ car le premier terme de la série est nul.

Exemple 31. Déterminer la nature et la somme des séries $\sum n3^n$, $\sum \dfrac{n}{7^n}$ et $\sum \dfrac{(n+1)4^n}{5^n}$.

Propriété 32

Soit $q \in \mathbb{R}_+$. La série $\sum n(n-1)q^{n-2}$ converge si et seulement si $q \in [0\,;1[$ et, dans ce cas,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)q^{n-2} = \frac{2}{(1-q)^3}.$$

Remarque 33. On peut faire commencer la somme à $n=1$ ou à $n=2$ car les deux premiers termes de la série sont nuls.

Exemple 34. Déterminer la nature et la somme des séries $\sum n^2 3^{n-2}$, $\sum \dfrac{n(n-1)}{7^n}$ et $\sum \dfrac{n^2 4^n}{5^n}$.

3) Séries exponentielles

Définition 35

Une série exponentielle est une série de la forme $\sum \dfrac{x^n}{n!}$ avec $x \in \mathbb{R}_+$.

Exemple 36. Les séries $\sum \dfrac{1}{n!}$, $\sum \dfrac{\sqrt{2}^n}{n!}$ et $\sum \dfrac{1}{2^n n!}$ sont des séries exponentielles.

Théorème 37. — admis

Pour tout réel x positif, la série exponentielle $\sum \dfrac{x^n}{n!}$ converge et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = \mathrm{e}^x.$$

Exemple 38. Calculer les sommes des séries de l'exemple 36.

IV. — Exercices

Exercice 1. Déterminer la nature et calculer la somme de chacune des séries suivantes.

1. $\sum \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$ **2.** $\sum \mathrm{e}^{-n} - \mathrm{e}^{-n-1}$ **3.** $\sum_{n\geqslant 1} \ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)$ **4.** $\sum_{n\geqslant 2} \ln\left(\dfrac{n^2}{n^2-1}\right)$.

Exercice 2. Déterminer la nature de la série dans chacun des cas suivants.

1. $\sum_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{n\cos^2(n)}$ **2.** $\sum \dfrac{n+5}{n^3+n+1}$ **3.** $\sum \dfrac{n\sqrt{n}}{n^4+1}$ **4.** $\sum \dfrac{n+1}{n^2+1}$

5. $\sum \dfrac{\mathrm{e}^n}{(n+1)^2}$ **6.** $\sum \dfrac{\left|\sin\left(\frac{n\pi}{6}\right)\right|}{6^n}$ **7.** $\sum_{n\geqslant 1} \dfrac{n(n-1)}{3^n+1}$ **8.** $\sum \dfrac{5^n+2}{5+4^n}$

9. $\sum_{n\geqslant 1} \cos\left(\dfrac{1}{2n}\right)$ **10.** $\sum_{n\geqslant 1} \sin\left(\dfrac{1}{2n}\right)$ **11.** $\sum \dfrac{3n+4}{2^n+5}$ **12.** $\sum_{n\geqslant 1} 1-\cos\left(\dfrac{1}{n}\right)$.

Exercice 3. Étudier la nature des séries suivantes et calculer la somme en cas de convergence.

1. $\sum \dfrac{1}{2n+1} - \dfrac{1}{2n+3}$ **2.** $\sum \dfrac{4^{n+1}}{n!}$ **3.** $\sum \dfrac{4^n+3^n}{5^n}$ **4.** $\sum \dfrac{7^n+6}{(n+1)!}$.

Exercice 4. Soit p un réel de $]0\,;1[$ et λ un réel quelconque. Étudier la nature des séries suivantes et calculer leurs sommes en cas de convergence.

1. $\sum_{n\geqslant 1} p(1-p)^{n-1}$ **2.** $\sum_{n\geqslant 1} np(1-p)^{n-1}$ **3.** $\sum_{n\geqslant 1} n^2p(1-p)^{n-1}$

4. $\sum \mathrm{e}^{-\lambda}\dfrac{\lambda^n}{n!}$ **5.** $\sum n\mathrm{e}^{-\lambda}\dfrac{\lambda^n}{n!}$ **6.** $\sum n^2\mathrm{e}^{-\lambda}\dfrac{\lambda^n}{n!}$

Exercice 5.

1. Justifier que $\sum_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{(2n)^2}$ converge et calculer sa somme S_1 en admettant que $\sum_{k=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n^2} = \dfrac{\pi^2}{6}$.

2. a. Justifier que $\sum \dfrac{1}{(2n+1)^2}$ converge. On note S_2 sa somme.

b. Déterminer $S_1 + S_2$ puis en déduire la valeur de S_2.

Exercice 6.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que, pour tout entier $k > 0$, si $k \leqslant n$ alors $\dfrac{1}{\sqrt{k}} \geqslant \dfrac{1}{\sqrt{n}}$.

2. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{k=1}^{2n} \dfrac{1}{\sqrt{k}} \geqslant \sqrt{n}$ puis déterminer la nature de $\sum_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{\sqrt{n}}$.

Exercice 7.

1. Déterminer la nature des séries $\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n^{\ln(n)}}$ et $\sum_{n\geqslant 2}\frac{1}{(\ln(n))^n}$.

2. **a.** Montrer que, pour tout entier $n\geqslant 2$, $(\ln(n))^{\ln(n)} = n^{\ln(\ln(n))}$.

b. Montrer qu'il existe un entier N tel que, pour tout $n\geqslant N$, $\ln(\ln(n))\geqslant 2$.

c. Déterminer la nature de $\sum_{n\geqslant 2}\frac{1}{(\ln(n))^{\ln(n)}}$.

Exercice 8.

1. Soit $m\in\mathbb{N}$ et $f_m : [2\,;+\infty[\longrightarrow\mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x)=\frac{1}{x(\ln(x))^m}$.

Calculer, pour tout réel $x\geqslant 2$, $f_m'(x)$ et en déduire les variations de f_m sur $[2\,;+\infty[$.

2. **a.** Soit un entier $k\geqslant 2$. Justifier que pour tout $x\in[k\,;k+1]$, $\frac{1}{k\ln(k)}\geqslant\frac{1}{x\ln(x)}$.

b. En déduire que, pour tout entier $k\geqslant 2$, $\frac{1}{k\ln(k)}\geqslant\int_k^{k+1}\frac{1}{x\ln(x)}\mathrm{d}x$.

c. Démontrer que, pour tout entier $n\geqslant 2$, $\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k\ln(k)}\geqslant\int_2^{n+1}\frac{1}{x\ln(x)}\mathrm{d}x$.

d. Calculer l'intégrale de la question précédente et en déduire la nature de la série $\sum_{n\geqslant 2}\frac{1}{n\ln(n)}$.

3. **a.** Soit un entier $k\geqslant 3$. Justifier que, pour tout $x\in[k-1\,;k]$, $\frac{1}{k(\ln(k))^2}\leqslant\frac{1}{x(\ln(x))^2}$.

b. En déduire que, pour tout entier $k\geqslant 3$, $\frac{1}{k(\ln(k))^2}\leqslant\int_{k-1}^{k}\frac{1}{x(\ln(x))^2}\mathrm{d}x$.

c. En s'inspirant de la démarche de la question **2.**, déduire la nature de $\sum_{n\geqslant 2}\frac{1}{n(\ln(n))^2}$.

d. Soit un entier $p\geqslant 2$. Déduire de la question précédente la nature de $\sum_{n\geqslant 2}\frac{1}{n(\ln(n))^p}$.

Exercice 9.

1. Déterminer $(a\,;b)\in\mathbb{R}^2$ tel que, pour tout $k\in\mathbb{N}^*$, $\frac{1}{k(k+1)}=\frac{a}{k}+\frac{b}{k+1}$.

2. En déduire que $\sum_{n\in\mathbb{N}^*}\frac{1}{n(n+1)}$ converge et calculer sa somme.

Exercice 10.

1. Déterminer $(a\,;b\,;c)\in\mathbb{R}^3$ tel que, pour tout $k\in\mathbb{N}^*$, $\frac{1}{k(k+1)(k+2)}=\frac{a}{k}+\frac{b}{k+1}+\frac{c}{k+2}$.

2. En déduire que la série $\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n(n+1)(n+2)}$ converge et calculer sa somme.

Exercice 11. On considère la suite (F_n) définie par $F_0=0$, $F_1=1$ et, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $F_{n+2}=F_{n+1}+F_n$. On admet que $\lim_{n\to+\infty}F_n=+\infty$.

Montrer que la série $\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{F_nF_{n+2}}$ converge et calculer sa somme.

Exercice 12.

1. Montrer que l'ensemble $\{x\in\mathbb{R}\mid\sin^2(x)\leqslant\frac{1}{2}\}$ ne contient pas trois entiers consécutifs.

2. En déduire que la série $\sum_{n\geqslant 1}\frac{\sin^2(n)}{n}$ diverge.