⧫ Chapitre 2. Espaces vectoriels

Dans toute la suite, K désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et les éléments de K (les réels ou les complexes selon le cas) seront appelés les scalaires.

I. — Définition et exemples

1) Définition

Définition 1

Un **espace vectoriel sur** K (ou un K-espace vectoriel) est un ensemble muni de deux opérations :

1. une **addition**, notée $+$, telle que
   - **a.** pour tout $(u\,;v) \in E^2$, $u + v \in E$;
   - **b.** pour tout $(u\,;v) \in E^2$, $u + v = v + u$ (l'addition est commutative) ;
   - **c.** pour tout $(u\,;v\,;w) \in E^3$, $(u + v) + w = u + (v + w)$ (l'addition est associative) ;
   - **d.** il existe un élément de E, appelé **élément neutre** et noté 0_E, tel que, pour tout $v \in E$, $v + 0_E = v$;
   - **e.** pour tout $v \in E$, il existe un élément de E, appelé **opposé de** v et noté $-v$, tel que $v + (-v) = 0_E$.
2. une **multiplication par un scalaire**, notée $\cdot$, telle que :
   - **a.** pour tout $(\lambda\,;v) \in K \times E$, $\lambda \cdot v \in E$;
   - **b.** pour tout $(\lambda\,;\mu) \in K^2$ et tout $(u\,;v) \in E^2$, $(\lambda + \mu) \cdot v = \lambda \cdot v + \mu \cdot v$ et $\lambda \cdot (u + v) = \lambda \cdot u + \lambda \cdot v$ (distributivité à droite et à gauche de la multiplication sur l'addition) ;
   - **c.** pour tout $(\lambda\,;\mu) \in K^2$ et tout $v \in E$, $\lambda \cdot (\mu \cdot v) = (\lambda\mu) \cdot v$ (associativité de la multiplication par un scalaire) ;
   - **d.** pour tout $v \in E$, $1 \cdot v = v$.

Les éléments de E sont alors appelés des **vecteurs**.

Remarque 2.

1. L'élément neutre 0_E est unique et on le note souvent simplement 0.
   En effet, supposons qu'il existe deux éléments neutres n_1 et n_2. Alors, comme n_1 est un vecteur et comme n_2 est neutre pour l'addition, $n_1 + n_2 = n_1$ et, de même, comme n_2 est un vecteur et comme n_1 est neutre pour l'addition, $n_2 + n_1 = n_2$. Or, par commutativité de l'addition, $n_1 + n_2 = n_2 + n_1$ donc $n_1 = n_2$. Ainsi, l'élément neutre est unique.
2. Pour tout $v \in E$, l'opposé de v est unique et on note, pour tout $u \in E$, $u - v$ plutôt que $u + (-v)$.
3. Dans la pratique, le point de la multiplication par un scalaire est omis : on notera donc λv plutôt que $\lambda \cdot v$ le produit du vecteur v par le scalaire λ.
4. On peut montrer que les axiomes précédents impliquent que, pour tout $\lambda \in K$ et tout $v \in E$, $\lambda \cdot v = 0_E$ si et seulement si $\lambda = 0$ ou $x = 0_E$ et $\lambda \cdot (-v) = (-\lambda) \cdot v = -(\lambda \cdot v)$.

En effet, pour tout $v \in E$, $v + 0 \cdot v = (1+0)\cdot v = 1 \cdot v = v$ donc $0v$ est neutre pour l'addition et ainsi, par unicité de l'élément neutre, $0 \cdot v = 0_E$. De même, pour tout $\lambda \in K \setminus \{0\}$ et pour tout $v \in E$,

$$\begin{aligned} v + \lambda \cdot 0_E = 1 \cdot v + \lambda \cdot 0_E &= \left(\lambda \times \frac{1}{\lambda}\right) \cdot v + \lambda \cdot 0_E = \lambda \cdot \left(\frac{1}{\lambda} \cdot v\right) + \lambda \cdot 0_E \\ &= \lambda \cdot \left(\frac{1}{\lambda} \cdot v + 0_E\right) = \lambda \cdot \left(\frac{1}{\lambda} \cdot v\right) = \left(\lambda \times \frac{1}{\lambda}\right) \cdot v = 1 \cdot v = v \end{aligned}$$

donc $\lambda \cdot 0_E$ est neutre pour l'addition et donc $\lambda \cdot 0_E = 0_E$. On a donc montré que si $\lambda = 0$ ou $v = 0_E$ alors $\lambda \cdot v = 0_E$.
Réciproquement, considérons $\lambda \in K$ et $v \in E$ tels que $\lambda \neq 0$. Alors, $\frac{1}{\lambda} \cdot (\lambda \cdot v) = \frac{1}{\lambda} \cdot 0_E = 0_E$ (d'après le sens direct) donc $(\frac{1}{\lambda} \times \lambda) \cdot v = 0_E$ i.e. $1 \cdot v = 0_E$ donc $v = 0_E$. Ainsi, si $\lambda v = 0_E$ alors $\lambda = 0$ ou $v = 0_E$.
On a donc bien montré l'équivalence : pour tout $(\lambda\,; v) \in K \times E$, $\lambda \cdot 0_E = 0_E$ si et seulement si $\lambda = 0$ ou $v = 0_E$.
Soit $(\lambda\,; v) \in K \times E$. Alors, $\lambda \cdot (-v) + \lambda \cdot v = \lambda \cdot (v + (-v)) = \lambda \cdot 0_E = 0_E$ donc $\lambda \cdot (-v) = -(\lambda \cdot v)$. De même, $(-\lambda) \cdot v + \lambda \cdot v = (-\lambda + \lambda) \cdot v = 0 \cdot v = 0_E$ donc $(-\lambda) \cdot v = -(\lambda \cdot v)$.

2) Exemples à connaître

Exemple 3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. L'ensemble K^n des n-uplets d'éléments de K muni des opérations :

1. pour tout $(x_1, x_2, ..., x_n) \in K^n$ et tout $(y_1, y_2, ..., y_n) \in K^n$, $(x_1, x_2, ..., x_n) + (y_1, y_2, ..., y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, ..., x_n + y_n)$;
2. pour tout $(x_1, x_2, ..., x_n) \in K^n$ et tout $\lambda \in K$, $\lambda(x_1, x_2, ..., x_n) = (\lambda x_1, \lambda x_2, ..., \lambda x_n)$;

est un espace vectoriel sur K dont l'élément neutre est le n-uplet nul $(0, 0, ..., 0)$.

Exemple 4. Soit A une partie de $\mathbb{R}$. L'ensemble $\mathscr{F}(A, \mathbb{R}) = \mathbb{R}^A$ des fonctions de A dans $\mathbb{R}$ muni des opérations :

1. pour tout $(f, g) \in \mathscr{F}(A, \mathbb{R})^2$, $f + g : x \longmapsto f(x) + g(x)$;
2. pour tout $f \in \mathscr{F}(A, \mathbb{R})$ et tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda f : x \longmapsto \lambda f(x)$;

est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ dont l'élément neutre est la fonction nulle sur A.

Exemple 5. L'ensemble $\mathbb{R}[X]$ des polynômes à coefficients réels muni des opérations :

1. pour tout $(P, Q) \in \mathbb{R}[X]^2$, $P + Q : x \longmapsto P(x) + Q(x)$;
2. pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$ et tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda P : x \longmapsto \lambda P(x)$;

est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ dont l'élément neutre est le polynôme nul.

Exemple 6. Soit $n \in \mathbb{N}$. L'ensemble $\mathbb{R}_n[X]$ des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n muni des mêmes opérations que précédemment est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ dont l'élément neutre est le polynôme nul.

Exemple 7. Soit m et n deux entiers naturels non nuls. L'ensemble $\mathscr{M}_{n,m}(K)$ des matrices de taille $n \times m$ à coefficients dans K muni des opérations :

1. pour tout $A = (a_{i,j}) \in \mathscr{M}_{n,m}(K)$ et tout $B = (b_{i,j}) \in \mathscr{M}_{n,m}(K)$, $A + B = (a_{i,j} + b_{i,j})$;
2. pour tout $A = (a_{i,j}) \in \mathscr{M}_{n,m}(K)$ et tout $\lambda \in K$, $\lambda A = (\lambda a_{i,j})$;

est un espace vectoriel sur K dont l'élément neutre est la matrice nulle $0_{n,m}$.

Exemple 8. L'ensemble des vecteurs du plan muni des opérations vues au lycée est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ dont l'élément neutre est le vecteur nul.

Exemple 9. L'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels muni de l'addition et de la multiplication usuelles est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ dont l'élément neutre est le nombre 0.

Exemple 10. L'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes muni de l'addition et de la multiplication usuelles est un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ dont l'élément neutre est le nombre 0. Il peut également être vu comme un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. Il s'agit dans les deux cas du même ensemble mais pas du même espace vectoriel (car l'ensemble des scalaires n'est pas le même donc la multiplication par un scalaire n'est pas la même dans les deux cas).

Exemple 11. Les ensembles E suivants, munis des opérations usuelles, sont-ils des espaces vectoriels sur K ?

1. $E = \mathbb{Z}$ sur $K = \mathbb{R}$;

2. $E = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ sur $K = \mathbb{C}$;

3. E est l'ensemble des matrices nilpotentes de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ c'est-à-dire

$$E = \{M \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \mid \exists p \in \mathbb{N}^*,\ M^p = 0_2\}$$

sur $K = \mathbb{R}$.

4. $E = \mathbb{R}$ sur $K = \mathbb{C}$.

Solution.

1. $v = 1 \in E$ et $\lambda = \frac{1}{2} \in \mathbb{R}$ mais $\lambda v = \frac{1}{2} \times 1 = \frac{1}{2} \notin E$ donc E n'est pas un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

2. $v = 1 \in E$ et $\lambda = \frac{1}{2} \in \mathbb{C}$ mais $\lambda v = \frac{1}{2} \times 1 = \frac{1}{2} \notin E$ car $\left|\frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2}$ donc E n'est pas un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

3. Considérons les matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Alors, $A^2 = B^2 = 0_2$ donc A et B appartiennent à E. Considérons la matrice $C = A + B$. Alors, $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ donc $C^2 = I_2$. Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Si p est pair alors il existe un entier $m \in \mathbb{N}^*$ tel que $p = 2m$ et donc $C^p = C^{2m} = (C^2)^m = I_2^m = I_2 \neq 0$ et, si p est impair, il existe un entier $m \in \mathbb{N}$ tel que $p = 2m + 1$ donc $C^p = C^{2m+1} = (C^2)^m \times C = I_2^m \times C = C \neq 0_2$. Ainsi, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, $C^p \neq 0_2$ donc $C \notin E$. Ainsi, E n'est pas un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

4. $v = 1 \in E$ et $\lambda = \mathrm{i} \in \mathbb{C}$ mais $\lambda v = \mathrm{i} \times 1 = \mathrm{i} \notin E$ donc E n'est pas un $\mathbb{C}$-espace vectoriel.

II. — Sous-espaces vectoriels

Définition 12

Soit E un K-espace vectoriel. Un **sous-espace vectoriel** de E est une partie F de E telle que :

1. $0_E \in F$;

2. F est stable pour l'addition c'est-à-dire, pour tout $(u\,;v) \in F^2$, $x + y \in F$;

3. F est stable pour le produit par un scalaire c'est-à-dire, pour tout $v \in F$ et tout $\lambda \in K$, $\lambda v \in F$.

Exemple 13.

1. $\mathbb{R}[X]$ est un sous-espace vectoriel du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{R}_n[X]$ est un sous-espace vectoriel du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}[X]$.
3. Pour tout K-espace vectoriel E, $\{0_E\}$ est un sous-espace vectoriel de E.
4. $\mathbb{R}$ est un sous-espace vectoriel du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$.

Théorème 14

Soit E un K-espace vectoriel. Un sous-espace vectoriel F de E est un K-espace vectoriel.

Démonstration. Comme F est un sous-espace vectoriel de E, $0_E \in F$ et F est stable par somme et par produit par un scalaire. De plus, l'addition étant commutative et associative dans E, elle l'est également dans F. De même, 0_E étant neutre pour l'addition dans E, il est neutre pour l'addition dans F. Si $v \in F$ alors, comme F est stable par produit par un scalaire, $(-1) \cdot v \in F$ c'est-à-dire, d'après le point **4.** de la Remarque 2, $-v \in F$. La multiplication étant distributive sur la somme et associative dans E, elle l'est aussi dans F et, enfin, pour tout $v \in F$, $v \in E$ donc $1 \cdot v = v$.

Ainsi, F est bien un espace vectoriel. □

Remarque 15. L'intérêt du théorème précédent réside dans le fait que pour montrer qu'une partie F d'un espace vectoriel E est aussi un espace vectoriel, il n'est pas nécessaire de vérifier tous les axiomes de la définition mais seulement les propriétés $0_E \in F$, F est stable pour l'addition et F est stable pour la multiplication par un scalaire. Dans la pratique, on peut même montrer ces deux stabilités d'un seul coup en montrant que, pour tout $\lambda \in K$ et tout $(u\,;v) \in F^2$, $\lambda u + v \in F$.

Exemple 16. Montrer que les ensembles suivants sont des espaces vectoriels sur $\mathbb{R}$.

1. $F_1 = \{(x\,;y\,;z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - 2y + 3z = 0\}$.
2. $F_2 = \{A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \mid {}^tA = A\}$.
3. F_3 est l'ensemble des solutions de l'équation différentielle $y' + 3y = 0$.

Solution.

1. Montrons que F_1 est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$. Par définition, $F_1 \subset \mathbb{R}^3$. De plus, $0 - 2 \times 0 + 3 \times 0 = 0$ donc $(0\,;0\,;0) \in F_1$. Soit $u_1 = (x_1\,;y_1\,;z_1)$ et $u_2 = (x_2\,;y_2\,;z_2)$ deux éléments de F_1 et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors, par définition, $x_1 - 2y_1 + 3z_1 = 0$ et $x_2 - 2y_2 + 3z_2 = 0$ donc

$$(\lambda x_1 + x_2) - 2(\lambda y_1 + y_2) + 3(\lambda z_1 + z_2) = \lambda(x_1 - 2y_2 + 3z_1) + (x_2 - 2y_2 + 3z_2) = \lambda \times 0 + 0 = 0$$

donc $\lambda u_1 + u_2 \in F_1$.

Ainsi F_1 est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ donc F_1 est un espace vectoriel.

2. Montrons que F_2 est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Par définition, $F_2 \subset \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et ${}^t0_n = 0_n$ donc $0_n \in F_2$. Soir A et B deux éléments de F_2 et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors, par propriétés de la transposition,

$${}^t(\lambda A + B) = {}^t(\lambda A) + {}^tB = \lambda {}^tA + {}^tB = \lambda A + B$$

car ${}^tA = A$ et ${}^tB = B$. Ainsi, $\lambda A + B \in F_2$ donc F_2 est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. En particulier, F_2 est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

3. Montrer que F_3 est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Par définition, $F_3 \subset \mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et, de plus, si f est la fonction nulle alors f' est également nulle donc $f' + 3f = 0$ et ainsi $f \in F_3$. Considérons deux éléments f et g de F_3 et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors,

$$(\lambda f + g)' + 3(\lambda f + g) = \lambda f' + g' + 3\lambda f + 3g = \lambda(f' + 3f) + (g' + 3g) = \lambda \times 0 + 0 = 0$$

donc $\lambda f + g \in F_3$. Ainsi, F_3 est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et donc F_3 est un espace vectoriel.

Propriété 17

Soit E un espace vectoriel et F et G deux sous-espaces vectoriels de E. Alors, $F \cap G$ est un sous-espace vectoriel de E.

Démonstration. Par définition, $0_E \in F$ et $0_E \in G$ donc $0_E \in F \cap G$. Soit u et v deux éléments de $F \cap G$ et $\lambda \in K$. Alors, u et v appartiennent à F donc, comme F est un sous-espace vectoriel de E, $\lambda u + v \in F$. De même, u et v sont dans G donc $\lambda u + v \in G$. Ainsi, $\lambda u + v \in F \cap G$ donc $F \cap G$ est sous-espace vectoriel de E. □

Exemple 18. Montrer que $G = \{(x\,;y\,;z) \in \mathbb{R}^3 \mid -x + y - 2z = 0\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ et en déduire que $H = \{(x\,;y\,;z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - 2y + 3z = 0 \text{ et } -x + y - 2z = 0\}$ est un espace vectoriel.

Solution. Montrons que G est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$. Par définition, $G \subset \mathbb{R}^3$. De plus, $-0 + 0 - 2 \times 0 = 0$ donc $(0\,;0\,;0) \in G$. Soit $u_1 = (x_1\,;y_1\,;z_1)$ et $u_2 = (x_2\,;y_2\,;z_2)$ deux éléments de G et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors, par définition, $-x_1 + y_1 - 2z_1 = 0$ et $-x_2 + y_2 - 2z_2 = 0$ donc

$$-(\lambda x_1 + x_2) + (\lambda y_1 + y_2) - 2(\lambda z_1 + z_2) = \lambda(-x_1 + y_2 - 2z_1) + (-x_2 + y_2 - 2z_2) = \lambda \times 0 + 0 = 0$$

donc $\lambda u_1 + u_2 \in G$.

Ainsi G est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$. On remarque que

$$H = \{(x\,;y\,;z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - 2y + 3z = 0 \text{ et } -x + y - 2z = 0\} = F_1 \cap G$$

donc, comme F_1 et G sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$, H est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}$. En particulier, H est un espace vectoriel.

⚠ En général, l'union de deux sous-espaces vectoriels n'est pas un espace vectoriel.

Exemple 19. Montrer que $F_1 \cup G = \{(x\,;y\,;z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - 2y + 3z = 0 \text{ ou } -x + y - 2z = 0\}$ n'est pas un espace vectoriel.

Solution. On peut remarquer que $u = (2\,;1\,;0) \in F_1$ donc $u \in F_1 \cup G$. De même, $v = (1\,;1\,;0) \in G$ donc $v \in F_1 \cup G$. Or, $u + v = (3\,;2\,;0)$ et, d'une part, $3 - 2 \times 2 + 3 \times 0 = -1 \neq 0$ donc $u + v \notin F_1$ et, d'autre part, $-3 + 2 - 2 \times 0 = -1 \neq 0$ donc $u + v \notin G$. Ainsi, $u + v \notin F_1 \cup G$ donc $F_1 \cup G$ n'est pas un espace vectoriel.

III. — Familles de vecteurs et sous-espaces engendrés

1) Familles de vecteurs

Définition 20

Soit E un K-espace vectoriel et $p \in \mathbb{N}^*$. Un p-uplet $\mathcal{F} = (v_1, v_2, ..., v_p)$ d'éléments de E est appelé une **famille de** p **vecteurs** de E.

Exemple 21.

1. $((1\,;0\,;1)\,,(0\,;1\,;2)\,,(4\,;-1\,;1)\,,(1\,;1\,;-1))$ est une famille de 4 vecteurs de $\mathbb{R}^3$.
2. $(\cos, \sin)$ est une famille de 2 vecteurs de $\mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
3. $(1, X, X^2)$ et une famille de 3 vecteurs de $\mathbb{R}_2[X]$.

Définition 22

Soit E un K-espace vectoriel et $\mathcal{F} = (v_1, v_2, ..., v_p)$ une famille de p vecteurs de E. Une **combinaison linéaire** de vecteurs de $\mathcal{F}$ est une somme de la forme

$$\sum_{k=1}^{p} \lambda_k v_k.$$

où λ_1, λ_2, ..., λ_p sont des scalaires.
Le nombre λ_1, λ_2, ..., λ_p sont appelés les **coefficients** de la combinaison linéaire.

Exemple 23.

1. Dans le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$, tout vecteur est combinaison linéaire de 1 et de i.
2. Dans $\mathbb{R}^3$, $u = (2\,;1\,;-2)$ est combinaison linéaire de $v_1 = (1\,;0\,;1)$ et $v_2 = (0\,;1\,;-4)$ car $u = 2v_1 + v_2$.
3. Dans $\mathbb{R}_2[X]$, $P = 2X^2 - X + 2$ est combinaison linéaire de $P_1 = 1$, $P_2 = X + 1$ et $P_3 = X^2 + X + 1$ car $P = 2P_3 - 3P_2 + 3$.

Propriété 24

Soit E un K-espace vectoriel. Toute combinaison linéaire de vecteurs de E est un vecteur de E.

Démonstration. On raisonne par récurrence sur le nombre de vecteurs de la famille. Si la famille contient un seul vecteur, alors la combinaison linéaire est de la forme λv avec $\lambda \in K$ et $v \in E$ donc, par définition, elle appartient à E.

Soit $p \in \mathbb{N}^*$. On suppose que toute combinaison linaire d'une famille de p vecteurs de E appartient à E. Considérons une famille $(v_1, v_2, ..., v_p, v_{p+1})$ de $p+1$ vecteurs de E et $S = \sum_{k=1}^{p+1} \lambda_k v_k$ une combinaison linéaire de ces vecteurs. Alors, $S = \sum_{k=1}^{p} \lambda_k v_k + \lambda_{p+1} v_{p+1}$. Or, $\sum_{k=1}^{p} \lambda_k v_k$ est une combinaison linéaire des p vecteurs v_1, v_2, ..., v_p donc, par hypothèse de récurrence, elle appartient à E et, par définition, $v_{p+1} \in E$ donc, par stabilité de E par produit par un scalaire et par somme, $\sum_{k=1}^{p} \lambda_k v_k + \lambda_{p+1} v_{p+1} \in E$. Ainsi, $S \in E$.

Par le principe de récurrence, on a montré que toute combinaison linéaire de vecteurs de E est un vecteur de E. □

Remarque 25. En particulier, si v_1, v_2, ..., v_p appartiennent tous à un sous-espace vectoriel F de E alors toute combinaison linéaire de ces vecteurs appartient également à F.

2) Sous-espace engendré par une famille de vecteurs

Théorème et définition 26

Soit E un K-espace vectoriel et $\mathcal{F} = (v_1, v_2, ..., v_p)$ une famille de vecteurs de E. L'ensemble des combinaisons linéaires des vecteurs de $\mathcal{F}$ est un sous-espace vectoriel de E appelé le **sous-espace engendré** par $\mathcal{F}$. On le note $\operatorname{Vect}(v_1, v_2, ..., v_p)$ ou $\operatorname{Vect}(\mathcal{F})$.

Démonstration. Notons F l'ensemble des combinaisons linéaires de $\mathcal{F}$. Par la propriété précédente, $F \subset E$. De plus, $0_E = 0v_1 + 0v_2 + \cdots + 0v_p$ donc $0_E \in F$. Soit u et u' deux éléments de F et $\mu \in K$. Par définition, il existe des scalaires λ_1, ..., λ_p, λ'_1, ..., λ'_p tels que $u = \sum\limits_{k=1}^{p} \lambda_k v_k$ et $u' = \sum\limits_{k=1}^{p} \lambda'_k v_k$. Ainsi,

$$\mu u + u' = \mu \left(\sum_{k=1}^{p} \lambda_k v_k \right) + \sum_{k=1}^{p} \lambda'_k v_k = \sum_{k=1}^{p} \mu \lambda_k v_k + \sum_{k=1}^{p} \lambda'_k v_k = \sum_{k=1}^{p} \mu \lambda_k v_k + \lambda'_k v_k = \sum_{k=1}^{p} (\mu \lambda_k + \lambda'_k) v_k$$

donc $\mu u + u'$ est une combinaison linéaire des vecteurs v_1, v_2, ..., v_p donc $\mu u + u' \in F$.

Ainsi, F est un sous-espace vectoriel de E. □

Remarque 27.

1. On a donc $\operatorname{Vect}(v_1, v_2, ..., v_p) = \{\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_p v_p \mid (\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_p) \in K^p\}$.
2. Si $v_1, ..., v_p$ appartiennent à un sous-espace vectoriel F de E alors $\operatorname{Vect}(v_1, ..., v_p) \subset F$.
3. Un espace engendré par un vecteur non nul est appelé **droite vectorielle**.

Exemple 28.

1. En tant que $\mathbb{R}$-espace vectoriel, $\mathbb{C} = \operatorname{Vect}(1, i)$.
2. L'ensemble des solutions de l'équation différentielle $y'' + y = 0$ est $\operatorname{Vect}(\cos, \sin)$.

Exemple 29.

1. Dans $\mathbb{R}[X]$, déterminer $\operatorname{Vect}(1, X, X^2, X^3)$.
2. Montrer que $F_4 = \{(a + 2b\,; a - b\,; -3a + 5b) \mid (a\,; b) \in \mathbb{R}^2\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

Solution.

1. $\operatorname{Vect}(1, X, X^2, X^3) = \{a + bX + cX^2 + dX^3 \mid (a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4\}$ donc, par définition, $\operatorname{Vect}(1, X, X^2, X^3) = \mathbb{R}_4[X]$.
2. On peut remarquer que

$$F_4 = \{a\,(1\,; 1\,; -3) + b\,(2\,; -1\,; 5) \mid (a\,; b) \in \mathbb{R}^2\} = \operatorname{Vect}((1\,; 1\,; -3)\,, (2\,; -1\,; 5))$$

donc F_4 est un espace vectoriel. Plus précisément, il s'agit du sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ engendré par les deux vecteurs $u = (1\,; 1\,; -3)$ et $v = (2\,; -1\,; 5)$.

IV. — Familles libres, familles génératrices, bases

1) Familles libres

Définition 30

Soit E un K-espace vectoriel et $\mathcal{F} = (v_1, v_2, ..., v_p)$ une famille de vecteurs de E.

- On dit que $\mathcal{F}$ est une **famille libre** si

$$\forall(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_p) \in K^p \qquad \sum_{k=1}^{p} \lambda_k v_k = 0_E \Longleftrightarrow (\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_p) = (0, 0, ..., 0).$$

  Autrement dit, une famille est libre si la seule combinaison linéaire de ses vecteurs qui soit nulle est la combinaison dont tous les coefficients sont nuls.
- Si la famille $\mathcal{F}$ n'est pas libre, on dit qu'elle est **liée**.

Exemple 31.

1. Montrer que $(1, X, X^2)$ est une famille libre de $\mathbb{R}_2[X]$.
2. Montrer que $(X^2 + X + 1, X^2 - X + 1, X^2 + X - 1)$ est une famille libre de $\mathbb{R}[X]$.
3. Montrer que $(\cos, \sin)$ est une famille libre de $\mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
4. Montrer que $((0, 1), (1, 1), (1, 2))$ est une famille liée de $\mathbb{R}^2$.

Solution.

1. Considérons trois réels a, b et c tels que $a \times 1 + bX + cX^2 = 0$ i.e. $cX^2 + bX + a$ est le polynôme nul. Par théorème, on en déduit que $a = b = c = 0$ donc la famille $(1, X, X^2)$ est libre.
2. Considérons deux réels a et b tels que $a \cos + b \sin$ soit la fonction nulle. En particulier, $a \cos(0) + b \sin(0) = 0$ donc $a = 0$ et $a \cos(\frac{\pi}{2}) + b \sin(\frac{\pi}{2}) = 0$ donc $b = 0$. Ainsi, $a = b = 0$ donc $(\cos, \sin)$ est une famille libre.
3. On peut remarquer que $(0, 1) + (1, 1) - (1, 2) = (0, 0)$ donc il existe une combinaison linéaire nulle de $(0, 1)$, $(1, 1)$ et $(1, 2)$ dont les coefficients ne sont pas tous nuls ce qui montre que $((0, 1), (1, 1), (1, 2))$ est une famille liée.

Remarque 32. Toute famille de vecteurs contenant 0_E est liée car $1 \cdot 0_E = 0_E$.

Propriété 33

Soit E un K-espace vectoriel et u et v des vecteurs de E.

1. La famille (u) est libre si et seulement si $u \neq 0_E$.
2. La famille (u, v) est libre si et seulement si u et v ne sont pas colinéaires c'est-à-dire si et seulement si, pour tout réel λ, $u \neq \lambda v$ et $v \neq \lambda u$.

Démonstration.

1. Si $u = 0_E$ alors $1 \cdot u = 0_E$ et $1 \neq 0$ donc (u) est liée. Réciproquement, suppose que (u) est liée. Alors, il existe $\lambda \neq 0$ tel que $\lambda \cdot u = 0_E$ et donc (point **4.** de la Remarque 2), $u = 0_E$. Ainsi, (u) est liée si et seulement si $u = 0_E$ donc (u) est libre si et seulement si $u \neq 0_E$.

2. Si (u,v) est liée alors il existe deux réels non tous les deux nuls a et b tels que $au+bv=0$. Si $a \neq 0$ alors $u = -\frac{b}{a}v$ donc, en posant $\lambda = -\frac{b}{a}$, $u = \lambda v$. Sinon, $b \neq 0$ et alors $v = -\frac{a}{b}u$ donc, en posant $\lambda = -\frac{a}{b}$, $v = \lambda u$. Ainsi, u et v sont colinéaires. Réciproquement, si u et v sont colinéaires, alors soit $u = \lambda v$ donc $u - \lambda v = 0_E$ donc (u,v) est liée (puisque $(1,-\lambda) \neq (0,0)$) soit $v = \lambda u$ donc $-\lambda u + v = 0_E$ donc (u,v) est liée (puisque $(-\lambda, 1) \neq (0,0)$). Ainsi, (u,v) est liée si et seulement si u et v sont colinéaires donc (u,v) est libre si et seulement si u et v ne sont pas colinéaires.

□

Remarque 34. Si (u,v) est une famille libre d'un espace vectoriel E alors $\mathrm{Vect}(u,v)$ est appelé un **plan vectoriel**. Ainsi, l'ensemble des solutions de l'équation différentielle $y'' + y = 0$ est le plan vectoriel engendré par cos et sin.

Propriété 35

Soit E un K-espace vectoriel et $\mathcal{F}$ une famille de vecteurs de E. La famille $\mathcal{F}$ est libre si et seulement si aucun vecteur de $\mathcal{F}$ n'est combinaison linéaire des autres vecteurs de $\mathcal{F}$.

Démonstration. Écrivons $\mathcal{F} = (v_1, v_2, ..., v_p)$. Si $\mathcal{F}$ est liée alors il existe des scalaires λ_1, λ_2, ..., λ_p non tous nuls tels que $\sum_{k=1}^{p} \lambda_k v_k = 0_E$. Quitte à modifier l'ordre des vecteurs, on peut supposer que $\lambda_1 \neq 0$. Alors, $v_1 = -\frac{1}{\lambda_1}\sum_{k=2}^{p} \lambda_k v_k = \sum_{k=2}^{p}\left(-\frac{\lambda_k}{\lambda_1}\right) v_k$ donc v_1 s'écrit comme combinaison linéaire des autres vecteurs de $\mathcal{F}$.

Inversement, si l'un des vecteurs de $\mathcal{F}$ s'écrit comme combinaison linéaire des autres vecteurs de $\mathcal{F}$, quitte à modifier l'ordre, on peut supposer qu'il s'agit de v_1. Alors, il existe des scalaires λ_2, ..., λ_p tels que $v_1 = \sum_{k=2}^{p} \lambda_k v_k$ et donc $v_1 - \sum_{k=2}^{p} \lambda_k v_k = 0_E$. Comme $(1, -\lambda_2, ..., -\lambda_p) \neq (0, 0, ..., 0)$, on en déduit que $\mathcal{F}$ est liée.

Ainsi, $\mathcal{F}$ est liée si et seulement si l'un des ses vecteurs est combinaison linéaire des autres donc $\mathcal{F}$ est libre si et seulement si aucun de ses vecteurs n'est combinaison linéaire des autres.

□

Remarque 36. On en déduit qu'une famille est liée si et seulement si on peut écrire un de ses vecteurs comme combinaison linéaire des autres vecteurs.

Méthode 37

- Pour montrer qu'une famille est libre, on écrit une combinaison linéaire nulle et on montre que tous les coefficients sont égaux à 0.
- Pour montrer qu'une famille est liée, on essaie d'exprimer un vecteur en fonction des autres.

Exemple 38. On se place dans $\mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. On considère les fonctions

$$f_0 : x \longmapsto 1 \qquad f_1 : x \longmapsto \cos(x) \qquad \text{et} \qquad f_2 : x \longmapsto \cos(2x).$$

1. La famille (f_0, f_1, f_2) est-elle libre ?

2. La famille (f_0, f_1^2, f_2) est-elle libre ?

Solution.

1. Considérons trois réels a, b et c tels que $af_0 + bf_1 + cf_2 = 0_{\mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})}$. Autrement dit, pour tout réel x, $a + b\cos(x) + c\cos(2x) = 0$.
En particulier, pour $x = 0$, on obtient $a + b + c = 0$, pour $x = \frac{\pi}{2}$, on obtient $a - b = 0$ et pour $x = \pi$, on obtient $a - b + c = 0$. Ainsi,
$$\begin{cases} a+b+c=0 & L_1 \\ a-b=0 & L_2 \\ a-b+c=0 & L_3 \end{cases} \iff \begin{cases} a+b+c=0 & L_1 \\ -2b-c=0 & L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ -2b=0 & L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=0 \\ b=0 \\ c=0 \end{cases}.$$
Ainsi, $a = b = c = 0$ donc la famille (f_0, f_1, f_2) est libre.
2. Pour tout réel x, $\cos(2x) = 2\cos^2(x) - 1$ donc $f_2 = 2f_1^2 - f_0$ et ainsi (f_0, f_1, f_2) est liée.

Propriété 39

Soit E un K-espace vectoriel, $\mathcal{F}$ une famille de vecteurs de E et $\mathcal{G}$ une famille obtenue à partir de $\mathcal{F}$ en enlevant éventuellement des vecteurs. Si $\mathcal{F}$ est libre alors $\mathcal{G}$ est libre.

Démonstration. Supposons que $\mathcal{F} = (v_1, v_2, ..., v_p)$ et, quitte à renuméroter, on peut supposer que $\mathcal{G} = (v_1, v_2, ..., v_m)$ avec $m \leqslant n$. Soit λ_1, λ_2, ..., λ_m des scalaires tels que $\sum_{k=1}^{m} \lambda_k v_k = 0$. Alors, en posant $\lambda_{m+1} = \cdots = \lambda_n = 0$, on a toujours $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k v_k = 0$. Comme $\mathcal{F}$ est libre, on en déduit que tous les λ_k sont nuls et, en particulier, $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_m = 0$ donc $\mathcal{G}$ est libre. □

2) Familles génératrices

Définition 40

Soit E un K-espace vectoriel et $\mathcal{F}$ une famille de vecteurs de E. On dit que $\mathcal{F}$ est une **famille génératrice** (de E) si $E = \mathrm{Vect}(\mathcal{F})$.
Autrement dit, une famille $(v_1, v_2, ..., v_p)$ de vecteurs de E est génératrice si, pour tout vecteur $v \in E$, il existe $(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_p)$ tel que $v = \sum_{k=1}^{p} \lambda_k v_k$.

Exemple 41.

1. Déterminer une famille génératrice de $\mathbb{R}_2[X]$.
2. Déterminer une famille génératrice de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.
3. Déterminer une famille génératrice de $F_1 = \{(x\,;y\,;z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - 2y + 3z = 0\}$.

Solution.

1. Tout $P \in \mathbb{R}_2[X]$ s'écrit sous la forme $a + bX + cX^2$ avec $(a\,;b\,;c) \in \mathbb{R}^3$ donc $(1, X, X^2)$ est une famille génératrice de $\mathbb{R}_2[X]$.
2. Toute matrice $M \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ s'écrit sous la forme $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ avec $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$ i.e.
$$M = a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + d\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$
donc la famille $\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$ est une famille génératrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

3. Par définition,

$$\begin{aligned} F_1 &= \{(x\,;y\,;z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = 2y + 3z\} \\ &= \{(2y+3z\,;y\,;z) \mid (y\,;z) \in \mathbb{R}^3\} \\ &= \{y\,(2\,;1\,;0) + z\,(3\,;0\,;1) \mid (y\,;z) \in \mathbb{R}^2\} \\ &= \mathrm{Vect}((2\,;1\,;0)\,,(3\,;0\,;1)) \end{aligned}$$

donc $((2\,;1\,;0)\,,(3\,;0\,;1))$ est une famille génératrice de F_1.

Remarque 42. Par définition, une famille de vecteurs $\mathcal{F}$ est génératrice de l'espace vectoriel $\mathrm{Vect}(\mathcal{F})$.

Propriété 43

Soit E un K-espace vectoriel, $\mathcal{F}$ une famille de E et $\mathcal{G}$ une famille obtenue à partir de $\mathcal{F}$ en ajoutant éventuellement des vecteurs. Si $\mathcal{F}$ est génératrice alors $\mathcal{G}$ est génératrice.

Démonstration. Supposons que $\mathcal{F} = (v_1, v_2, ..., v_p)$ et que $\mathcal{G} = (v_1, v_2, ..., v_n, v_{n+1}, v_m)$ avec $m \geqslant n$. Soit $x \in E$. Alors, comme $\mathcal{F}$ est génératrice, il existe des scalaires λ_1, λ_2, ..., λ_n tels que $x = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k v_k$. Alors, en posant $\lambda_{n+1} = \cdots = \lambda_m = 0$, on a toujours $x = \sum_{k=1}^{m} \lambda_k v_k$ donc $\mathcal{G}$ est génératrice. □

3) Bases

Définition 44

Soit E un K-espace vectoriel. On dit qu'une famille de vecteurs $\mathcal{F}$ de E est une **base** de E si $\mathcal{F}$ est à la fois libre et génératrice de E.

Exemple 45.

1. Déterminer une base $\mathbb{R}_2[X]$.

2. Déterminer une base $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

3. Déterminer une base de $F_1 = \{(x\,;y\,;z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - 2y + 3z = 0\}$.

Solution.

1. On a vu dans l'exemple 31 que $(1, X, X^2)$ est une famille libre et, dans l'exemple 41 que $(1, X, X^2)$ est une famille génératrice de $\mathbb{R}_2[X]$. Ainsi, $(1, X, X^2)$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

2. On a vu dans l'exemple 41 que $\mathcal{F}_2 = \left(\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\right)$ est une famille génératrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. De plus, si a, b, c et d sont des réels tels que

$$a\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix} + c\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix} + d\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix} = 0_2$$

alors $\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix} = 0_2$ donc $a = b = c = d = 0$ et ainsi la famille $\mathcal{F}_2$ est libre. On conclut que $\mathcal{F}_2$ est une base de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

3. On a vu dans l'exemple 41 que $\mathcal{F}_3 = ((2\,;1\,;0)\,,(3\,;0\,;1))$ est une famille génératrice de F_1. Soit a et b deux réels tels que $a\,(2\,;1\,;0) + b\,(3\,;0\,;1) = (0\,;0\,;0)$. Alors $(2a+3b\,;a\,;b) = (0\,;0\,;0)$ donc $a = b = 0$ et ainsi $\mathcal{F}_3$ est libre. On conclut que $\mathcal{F}_3$ est une base de F_1.

Théorème 46

Soit E un K-espace vectoriel et $\mathcal{F}$ une famille de vecteurs de E. Alors, $\mathcal{F}$ est une base de E si et seulement si tout vecteur de E s'écrit de manière unique comme combinaison linéaire des vecteurs de $\mathcal{F}$.
Autrement dit, une famille $(v_1, v_2, ..., v_p)$ de vecteurs de E est une base de E si et seulement si, pour tout vecteur v de E, il existe un unique p-uplet $(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_p) \in K^p$ tel que

$$v = \sum_{k=1}^{p} \lambda_k v_k.$$

Démonstration. Supposons que $\mathcal{F} = (v_1, v_2, ..., v_p)$ soit une base de E. Alors, en particulier, $\mathcal{F}$ est génératrice donc, pour tout $x \in E$, il existe des scalaires λ_1, λ_2, ..., λ_p tels que $x = \sum_{k=1}^{p} \lambda_k v_k$. Supposons qu'il existe des scalaires μ_1, μ_2, ..., μ_p tels que $x = \sum_{k=1}^{p} \mu_k v_k$. Alors, $\sum_{k=1}^{p} \lambda_k v_k = \sum_{k=1}^{p} \mu_k v_k$ donc $\sum_{k=1}^{p} \lambda_k v_k - \sum_{k=1}^{p} \mu_k v_k = 0_E$ i.e. $\sum_{k=1}^{p} (\lambda_k - \mu_k) v_k = 0_E$. Comme $\mathcal{F}$ est libre, on en déduit que pour tout $k \in [\![1, p]\!]$, $\lambda_k - \mu_k = 0$ donc $\lambda_k = \mu_k$. Ainsi, l'écriture $x = \sum_{k=1}^{p} \lambda_k v_k$ est unique.

Réciproquement, supposons que $\mathcal{F} = (v_1, v_2, ..., v_p)$ soit une famille de vecteurs de E telle que tout vecteur $v \in E$ s'écrive de façon unique comme combinaison linéaire des vecteurs de $\mathcal{F}$. Ainsi, tout vecteur de E est une combinaison linéaire des vecteurs de $\mathcal{F}$ donc $\mathcal{F}$ est génératrice. De plus, si λ_1, λ_2, ..., λ_p sont des scalaires tels que $\sum_{k=1}^{p} \lambda_k v_k = 0_E$ alors $\sum_{k=1}^{p} \lambda_k v_k = \sum_{k=1}^{p} 0 v_k$ donc, par unicité de la décomposition, pour tout $k \in [\![1, p]\!]$, $\lambda_k = 0$ donc $\mathcal{F}$ est libre. Ainsi, $\mathcal{F}$ est une base de E.

On a donc bien montré l'équivalence annoncée. □

Exemple 47. La famille $(1, X, X^2, X^3)$ est une base de $\mathbb{R}_3[X]$ car, par théorème, tout polynôme de degré inférieur ou égal à 3 s'écrit de manière unique sous la forme $aX^3 + bX^2 + cX + d$ avec $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$ c'est-à-dire comme combinaison linéaire de 1, X, X^2 et X^3.

V. — Espaces vectoriels de dimension finie

1) Définition

Définition 48

On dit qu'un K-espace vectoriel E est **de dimension finie** s'il admet une base (finie) ou s'il est réduit à $\{0_E\}$.

Exemple 49. Les espaces $\mathbb{R}_2[X]$, $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et F_1 sont des espaces de dimension finie. En revanche, les espaces $\mathbb{R}[X]$ et $\mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ ne sont pas de dimension finie.

Théorème et définition 50

Soit E un K-espace vectoriel E de dimension finie. Alors, toutes les bases de E ont le même cardinal. Ce nombre est appelé la **dimension** de E. On le note $\dim(E)$.

Ce théorème est admis.

2) Exemples à connaître

Exemple 51. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La famille $((1,0,...,0),(0,1,0,...0),...,(0,0,...,1))$ est une base de K^n appelée la base canonique de K^n. On en déduit que $\dim(K^n) = n$.

Exemple 52. Soit $n \in \mathbb{N}$. La famille $(1, X, X^2, ..., X^n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$ appelée la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$. On en déduit que $\dim(\mathbb{R}_n[X]) = n+1$.

Exemple 53. Soit n et m deux entiers naturels. Pour tout $(i\,;j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,m]\!]$, on définit la matrice élémentaire $E_{i,j}$ comme la matrice dont tous les coefficients sont nuls sauf le coefficient d'indices i et j qui vaut 1 :

$$\begin{array}{ccc} & \begin{array}{cccccc} & & & j^{\text{ème}} & & \\ & & & \text{colonne} & & \\ & & & \downarrow & & \end{array} & \\ E_{i,j} = & \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \\ \\ \\ \longleftarrow \begin{array}{l} i^{\text{ème}} \\ \text{ligne} \end{array} \\ \\ \\ \end{array} \end{array}$$

La famille $(E_{1,1}, E_{1,2}, ..., E_{n,1}, E_{2,1}, ..., E_{2,n}, ..., E_{1,m}, ..., E_{n,m})$ est une base de $\mathscr{M}_{n,m}(K)$ appelée base canonique de $\mathscr{M}_{n,m}(K)$. On en déduit que $\dim(\mathscr{M}_{n,m}(K)) = n \times m$.

Remarque 54. Les espaces vectoriels de dimension 1 sont les droites vectorielles et les espaces vectoriels de dimension 2 sont les plans vectoriels.

3) Liens entre dimension, famille libre et famille génératrice

Propriété 55

Soit E un K-espace vectoriel de dimension n et $\mathcal{F}$ une famille de p vecteurs de E.

1. Si $\mathcal{F}$ est libre alors $p \leqslant n$.

2. Si $\mathcal{F}$ est génératrice alors $p \geqslant n$.

3. Si $p = n$ alors il y a équivalente entre

• $\mathcal{F}$ est libre • $\mathcal{F}$ est génératrice • $\mathcal{F}$ est une base.

Cette proposition est admise.

Remarque 56. Soit E un espace vectoriel de dimension n.

1. Une famille de p vecteurs avec $p > n$ est liée et une famille de p vecteurs avec $p < n$ n'est pas génératrice.
2. Pour montrer qu'une famille de n vecteurs de E est une base, il suffit de montrer qu'elle est libre ou qu'elle est génératrice.

Exemple 57.

1. Justifier que $\mathcal{B}_1 = (X^2 + X + 1, X^2 - X + 1, X^2 + X - 1)$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.
2. Justifier que $\mathcal{B}_2 = ((1,1),(1,0))$ est une base de $\mathbb{R}^2$.

Solution.

1. On a vu dans l'exemple 31 que $\mathcal{B}_1$ est une famille libre de $\mathbb{R}_2[X]$. Or, le nombre de vecteurs de cette famille est égal à la dimension de $\mathbb{R}_2[X]$ donc $\mathcal{B}_1$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.
2. Montrons que $\mathcal{B}_2$ est libre. Soit a et b deux réels tels que $a(1,1) + b(1,0) = (0,0)$. Alors, $(a+b, a) = (0,0)$ donc $a + b = 0$ et $b = 0$ et ainsi $a = b = 0$. Dès lors, la famille $\mathcal{B}_2$ est libre et comme $\dim(\mathbb{R}^2) = 2$, on conclut que $\mathcal{B}_2$ est une base de $\mathbb{R}^2$.

4) Dimension d'un sous-espace

Propriété 58

Soit E un K-espace vectoriel de dimension finie et F un sous-espace vectoriel de E.

1. F est un espace vectoriel de dimension finie et $\dim(F) \leqslant \dim(E)$.
2. Si $\dim(F) = \dim(E)$ alors $F = E$.

Démonstration.

1. Si $F = \{0\}$ alors F est de dimension finie et $\dim(F) = 0 \leqslant \dim(E)$.
   Supposons $F \neq \{0\}$. Alors, l'ensemble $\mathscr{L}$ des familles libres de F est non vide. Considérons l'ensemble $\mathscr{N}$ des nombres de vecteurs des éléments de $\mathscr{L}$ c'est-à-dire l'ensemble des nombres de vecteurs des familles libres de F. Alors, $\mathscr{N}$ est une partie non vide de $\mathbb{N}$ et elle est majorée par n d'après la proposition 55. Ainsi, elle admet un plus grand élément m. Considérons alors une famille $(v_1, v_2, ..., v_m) \in \mathscr{L}$ de m vecteurs. Soit $x \in F$. La famille $\mathcal{F} = (v_1, v_2, ..., v_m, x)$ est une famille de $m+1$ vecteurs de F donc, par maximalité de m, cette famille est liée. Ainsi, il existe des scalaires non tous nuls λ_1, λ_2, ..., λ_m et λ tels que $\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_m v_m + \lambda x = 0_E$. Si $\lambda = 0$, on a $\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_m v_m = 0_E$ donc, comme $\mathcal{F}$ est libre, $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_k = 0$ ce qui contredit le fait que λ_1, λ_2, ..., λ_m et λ sont non tous nuls. Ainsi, $\lambda \neq 0$ et donc $x = -\frac{\lambda_1}{\lambda} - \cdots - \frac{\lambda_m}{\lambda} v_m$ donc $\mathcal{F}$ est une famille génératrice de F. Comme $\mathcal{F}$ est libre, on en déduit que $\mathcal{F}$ est une base de F donc $\dim(F) = m$. Or, $m \leqslant n = \dim(E)$ donc F est de dimension finie et $\dim(F) \leqslant \dim(E)$.
   Supposons que $\dim(F) = \dim(E)$. Alors, $\mathcal{F}$ est une famille libre de vecteurs de E contenant $m = \dim(E)$ vecteurs dont $\mathcal{F}$ est une base de E d'après la propriété 55. On en déduit que $E = \text{Vect}(\mathcal{F}) = F$.

$\square$

VI. — Représentation matricielle et rang d'une famille de vecteurs

1) Représentation matricielle d'une famille de vecteurs dans une base

On considère un K-espace vectoriel E de dimension finie n et une base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, ..., e_n)$ de E.

Par théorème, tout vecteur v de E peut s'écrire de manière unique sous la forme

$$v = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \cdots + \lambda_n e_n.$$

Définition 59

Avec les notations précédentes,

1. Les scalaires λ_1, λ_2, ..., λ_n sont appelés les **coordonnées de v dans la base $\mathcal{B}$**.
2. la matrice colonne $\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$ est appelé la **matrice des coordonnées v dans la base $\mathcal{B}$** et on la note $\mathcal{M}at_{\mathrm{B}}(v)$.
3. Si $\mathcal{F} = (v_1, v_2, ..., v_p)$ est une famille de p vecteurs de E, on appelle **matrice de $\mathcal{F}$ dans la base $\mathcal{B}$** et on note $\mathcal{M}at_{\mathcal{B}}(\mathcal{F})$ la matrice de $\mathscr{M}_{n,p}(K)$ telle que, pour tout $j \in [\![1, p]\!]$, la j-ème colonne de $\mathcal{M}at_{\mathcal{B}}(\mathcal{F})$ est égale à la matrice colonne $\mathcal{M}at_{\mathcal{B}}(v_j)$.

Exemple 60.

1. Déterminer la matrice de la famille $\mathcal{F}_1 = (X^2 + 4X - 1, X + 1)$ dans la base canonique $\mathcal{B}_{\text{can}}$ de $\mathbb{R}_2[X]$ puis dans la base $\mathcal{B}_1$ de l'exemple 57.
2. Déterminer la matrice de la famille $\mathcal{F}_2 = ((-1, 3), (7, -2))$ dans la base canonique $\mathcal{B}_{\text{can}}$ de $\mathbb{R}^2$ puis dans la base $\mathcal{B}_2$ de l'exemple 57.

Solution.

1. La base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$ est $\mathcal{B}_{\text{can}}(1, X, X^2)$. Or, $X^2 + 4X - 1 = (-1)1 + 4X + 1X^2$ et $X + 1 = 11 + 1X + 0X^2$ donc

$$\mathcal{M}at_{\mathcal{B}_{\text{can}}}(\mathcal{F}_1) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 4 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

2. La base canonique de $\mathbb{R}^2$ est $((1, 0), (0, 1))$. Or, $(-1, 3) = (-1)(1, 0) + 3(0, 1)$ et $(7, -2) = 7(1, 0) + (-2)(0, 1)$ donc

$$\mathcal{M}at_{\mathcal{B}_{\text{can}}}(\mathcal{F}_2) = \begin{pmatrix} -1 & 7 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$$

Par ailleurs, $\mathcal{B}_2 = ((1, 1), (1, 0))$. Or, $(-1, 3) = 3(1, 1) + (-4)(1, 0)$ et $(7, -2) = (-2)(1, 1) + 9(1, 0)$ donc

$$\mathcal{M}at_{\mathcal{B}_{\text{can}}}(\mathcal{F}_2) = \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ -4 & 9 \end{pmatrix}$$

2) Rang d'une famille de vecteurs

Définition 61

Soit E un espace de dimension finie et $\mathcal{F}$ une famille de vecteurs de E. On appelle **rang** de $\mathcal{F}$ et on note $\mathrm{rg}(\mathcal{F})$ la dimension de $\mathrm{Vect}(\mathcal{F})$.

Remarque 62. Si la famille $\mathcal{F}$ est libre alors c'est une base de $\mathrm{Vect}(\mathcal{F})$ donc $\mathrm{rg}(\mathcal{F}) = \mathrm{Card}(\mathcal{F})$.

Théorème 63

Soit E un espace vectoriel de dimension, $\mathcal{F}$ une famille de vecteurs de E et $\mathcal{B}$ une base de E. Alors,

$$\mathrm{rg}(\mathcal{F}) = \mathrm{rg}(\mathcal{M}at_{\mathcal{B}}(\mathcal{F})).$$

Ce théorème est admis.

Remarque 64. Autrement dit, la dimension de l'espace engendré par une famille de vecteurs est égale aux nombres de pivots de la matrice de cette famille dans n'importe quelle base de E.

Exemple 65. Déterminer de deux façons différentes le rang de la famille de $\mathbb{R}_2[X]$:

$$\mathcal{F} = (X^2 - X + 1, 2X^2 + X + 2, (X+1)^2, 3X)$$

Solution.
Méthode 1. La matrice $\mathcal{F}$ dans la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$ est

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Or, par la méthode du Pivot de Gauss, la rang de cette matrice est le même que celui de

$$\begin{pmatrix} \boxed{1} & 2 & 1 & 0 \\ 0 & \boxed{3} & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ L_2 \leftarrow L_2 + L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{array}$$

donc le rang de la matrice est 2 et ainsi $\mathrm{rg}(\mathcal{F}) = 2$.

Méthode 2. Comme $\mathrm{Vect}(F)$ est un sous-espace de $\mathbb{R}_2[X]$, il est de dimension au plus $\dim(\mathbb{R}_2[X]) = 3$. On remarque $(X^2 - X + 1, 3X)$ est une famille libre car si a et b sont deux réels tels que $a(X^2 - X + 1) + b(3X) = 0$ alors $aX^2 + (3b - a)X + a = 0$ donc $a = 0$ et $3b - a = 0$ et ainsi $a = b = 0$. De plus, on remarque $2X^2 + X + 2 = 2(X^2 - x + 1) + 3X$ et $(X+1)^2 = X^2 + 2X + 1 = X^2 - 2X + 1 + 3X$. Ainsi, $2X^2 + X + 2$ et $(X+1)^2$ appartiennent à $\mathrm{Vect}(X^2 - X + 1), 3X)$ donc $\mathrm{Vect}(\mathcal{F}) = \mathrm{Vect}(X^2 - X + 1), 3X)$. Ainsi, $(X^2 - X + 1, 3X)$ est une base de $\mathrm{Vect}(\mathcal{F})$ donc $\dim(\mathrm{Vect}(\mathcal{F})) = 2$ et donc, par définition, $\mathrm{rg}(\mathcal{F}) = 2$.

Propriété 66

Soit E un K-espace vectoriel de dimension finie et $\mathcal{F} = (v_1, v_2, ..., v_p)$ une famille de vecteurs de E.

1. $\mathcal{F}$ est libre si et seulement si $\text{rg}(\mathcal{F}) = p$;

2. $\mathcal{F}$ est génératrice si et seulement si $\text{rg}(\mathcal{F}) = \dim(E)$

3. $\mathcal{F}$ est une base si et seulement si $\text{rg}(\mathcal{F}) = p = \dim(E)$.

Démonstration.

1. Supposons que $\mathcal{F}$ est libre. Alors, $\mathcal{F}$ est une base de $\text{Vect}(\mathcal{F})$ donc $p = \dim(\text{Vect}(\mathcal{F})) = \text{rg}(\mathcal{F})$.

Réciproquement, supposons que $p = \text{rg}(\mathcal{F})$. Alors, $\dim(\text{Vect}(\mathcal{F})) = p$ donc, puisque $\mathcal{F}$ est génératrice de $\text{Vect}(\mathcal{F})$, d'après la propriété 55, $\mathcal{F}$ est libre.

2. Supposons que $\mathcal{F}$ est génératrice. Alors, $\text{Vect}(\mathcal{F}) = E$ donc $\text{rg}(\mathcal{F}) = \dim(\text{Vect}(\mathcal{F})) = \dim(E)$.

Réciproquement, supposons que $\text{rg}(\mathcal{F}) = \dim(E)$. Alors, $\dim(\text{Vect}(\mathcal{F})) = \dim(E)$ donc, comme $\text{Vect}(\mathcal{F}) \subset E$, d'après la propriété 58, $\text{Vect}(\mathcal{F}) = E$ donc $\mathcal{F}$ est une famille génératrice de E.

3. D'après les deux points précédentes, $\mathcal{F}$ est une base si et seulement si $\text{rg}(\mathcal{F}) = p$ et $\text{rg}(\mathcal{F}) = \dim(E)$ donc si et seulement si $\text{rg}(\mathcal{F}) = p = \dim(E)$.

□

Exemple 67. Démontrer que, quels que soient les éléments a, b, c, d, e et f de K, la famille $((1, a, b, c), (0, 2, d, e), (0, 0, 3, f), (0, 0, 0, 4))$ est une base de K^4.

Solution. Soit a, b, c, d, e et f des éléments de K. La matrice de la famille considérée dans la base canonique de K^4 est

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a & 2 & 0 & 0 \\ b & d & 3 & 0 \\ c & e & f & 4 \end{pmatrix}$$

Il s'agit d'une matrice triangulaire inférieure dont les quatre coefficients diagonaux sont non nuls. Dès lors, M est inversible donc $\text{rg}(M) = 4$. Ainsi, le rang de la famille est 4 qui est égal à la dimension de K^4 donc cette famille est une base de K^4.