⧫ Chapitre 2. Espaces vectoriels

Dans toute la suite, K désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et les éléments de K (les réels ou les complexes selon le cas) seront appelés les scalaires.

I. — Définition et exemples

1) Définition

Définition 1

Un **espace vectoriel sur** K (ou un K-espace vectoriel) est un ensemble muni de deux opérations :

1. une **addition**, notée $+$, telle que
   - **a.** pour tout $(u\,;v) \in E^2$, $u+v \in E$;
   - **b.** pour tout $(u\,;v) \in E^2$, $u+v = v+u$ (l'addition est commutative) ;
   - **c.** pour tout $(u\,;v\,;w) \in E^3$, $(u+v)+w = u+(v+w)$ (l'addition est associative) ;
   - **d.** il existe un élément de E, appelé **élément neutre** et noté 0_E, tel que, pour tout $v \in E$, $v + 0_E = v$;
   - **e.** pour tout $v \in E$, il existe un élément de E, appelé **opposé de** v et noté $-v$, tel que $v + (-v) = 0_E$.
2. une **multiplication par un scalaire**, notée $\cdot$, telle que :
   - **a.** pour tout $(\lambda\,;v) \in K \times E$, $\lambda \cdot v \in E$;
   - **b.** pour tout $(\lambda\,;\mu) \in K^2$ et tout $(u\,;v) \in E^2$, $(\lambda+\mu)\cdot v = \lambda \cdot v + \mu \cdot v$ et $\lambda \cdot (u+v) = \lambda \cdot u + \lambda \cdot v$ (distributivité à droite et à gauche de la multiplication sur l'addition) ;
   - **c.** pour tout $(\lambda\,;\mu) \in K^2$ et tout $v \in E$, $\lambda \cdot (\mu \cdot v) = (\lambda\mu)\cdot v$ (associativité de la multiplication par un scalaire) ;
   - **d.** pour tout $v \in E$, $1 \cdot v = v$.

Les éléments de E sont alors appelés des **vecteurs**.

Remarque 2.

1. L'élément neutre 0_E est unique et on le note parfois simplement 0.
2. Pour tout $v \in E$, l'opposé de v est unique et on note, pour tout $u \in E$, $u - v$ plutôt que $u + (-v)$.
3. Dans la pratique, le point de la multiplication par un scalaire est omis : on notera donc λv plutôt que $\lambda \cdot v$ le produit du vecteur v par le scalaire λ.
4. On peut montrer que les axiomes précédents impliquent que, pour tout $\lambda \in K$ et tout $v \in E$, $\lambda \cdot v = 0_E$ si et seulement si $\lambda = 0$ ou $v = 0_E$ et $\lambda \cdot (-v) = (-\lambda)\cdot v = -(\lambda \cdot v)$.

2) Exemples à connaître

Exemple 3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. L'ensemble K^n des n-uplets d'éléments de K muni des opérations :

1. pour tout $(x_1, x_2, ..., x_n) \in K^n$ et tout $(y_1, y_2, ..., y_n) \in K^n$, $(x_1, x_2, ..., x_n)+(y_1, y_2, ..., y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, ..., x_n + y_n)$;
2. pour tout $(x_1, x_2, ..., x_n) \in K^n$ et tout $\lambda \in K$, $\lambda(x_1, x_2, ..., x_n) = (\lambda x_1, \lambda x_2, ..., \lambda x_n)$;

est un espace vectoriel sur K dont l'élément neutre est le n-uplet nul $(0, 0, ..., 0)$.

Exemple 4. Soit A une partie de $\mathbb{R}$. L'ensemble $\mathscr{F}(A, \mathbb{R}) = \mathbb{R}^A$ des fonctions de A dans $\mathbb{R}$ muni des opérations :

1. pour tout $(f, g) \in \mathscr{F}(A, \mathbb{R})^2$, $f + g : x \longmapsto f(x) + g(x)$;
2. pour tout $f \in \mathscr{F}(A, \mathbb{R})$ et tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda f : x \longmapsto \lambda f(x)$;

est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ dont l'élément neutre est la fonction nulle sur A.

Exemple 5. L'ensemble $\mathbb{R}[X]$ des polynômes à coefficients réels muni des opérations :

1. pour tout $(P, Q) \in \mathbb{R}[X]^2$, $P + Q : x \longmapsto P(x) + Q(x)$;
2. pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$ et tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda P : x \longmapsto \lambda P(x)$;

est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ dont l'élément neutre est le polynôme nul.

Exemple 6. Soit $n \in \mathbb{N}$. L'ensemble $\mathbb{R}_n[X]$ des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n muni des mêmes opérations que précédemment est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ dont l'élément neutre est le polynôme nul.

Exemple 7. Soit m et n deux entiers naturels non nuls. L'ensemble $\mathscr{M}_{n,m}(K)$ des matrices de taille $n \times m$ à coefficients dans K muni des opérations :

1. pour tout $A = (a_{i,j}) \in \mathscr{M}_{n,m}(K)$ et tout $B = (b_{i,j}) \in \mathscr{M}_{n,m}(K)$, $A + B = (a_{i,j} + b_{i,j})$;
2. pour tout $A = (a_{i,j}) \in \mathscr{M}_{n,m}(K)$ et tout $\lambda \in K$, $\lambda A = (\lambda a_{i,j})$;

est un espace vectoriel sur K dont l'élément neutre est la matrice nulle $0_{n,m}$.

Exemple 8. L'ensemble des vecteurs du plan muni des opérations vues au lycée est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ dont l'élément neutre est le vecteur nul.

Exemple 9. L'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels muni de l'addition et de la multiplication usuelles est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ dont l'élément neutre est le nombre 0.

Exemple 10. L'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes muni de l'addition et de la multiplication usuelles est un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ dont l'élément neutre est le nombre 0. Il peut également être vu comme un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. Il s'agit dans les deux cas du même ensemble mais pas du même espace vectoriel (car l'ensemble des scalaires n'est pas le même donc la multiplication par un scalaire n'est pas la même dans les deux cas).

Exemple 11. Les ensembles E suivants, munis des opérations usuelles, sont-ils des espaces vectoriels sur K ?

1. $E = \mathbb{Z}$ sur $K = \mathbb{R}$;
2. $E = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ sur $K = \mathbb{C}$;
3. E est l'ensemble des matrices nilpotentes de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ c'est-à-dire
$$E = \{M \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \mid \exists p \in \mathbb{N}^*,\ M^p = 0_2\}$$
sur $K = \mathbb{R}$.
4. $E = \mathbb{R}$ sur $K = \mathbb{C}$.

II. — Sous-espaces vectoriels

Définition 12

Soit E un K-espace vectoriel. Un **sous-espace vectoriel** de E est une partie F de E telle que :

1. $0_E \in F$;

2. F est stable pour l'addition c'est-à-dire, pour tout $(u\,;v) \in F^2$, $x + y \in F$;

3. F est stable pour le produit par un scalaire c'est-à-dire, pour tout $v \in F$ et tout $\lambda \in K$, $\lambda v \in F$.

Exemple 13.

1. $\mathbb{R}[X]$ est un sous-espace vectoriel du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{R}_n[X]$ est un sous-espace vectoriel du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}[X]$.

3. Pour tout K-espace vectoriel E, $\{0_E\}$ est un sous-espace vectoriel de E.

4. $\mathbb{R}$ est un sous-espace vectoriel du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$.

Théorème 14

Soit E un K-espace vectoriel. Un sous-espace vectoriel F de E est un K-espace vectoriel.

Remarque 15. L'intérêt du théorème précédent réside dans le fait que pour montrer qu'une partie F d'un espace vectoriel E est aussi un espace vectoriel, il n'est pas nécessaire de vérifier tous les axiomes de la définition mais seulement les propriétés $0_E \in F$, F est stable pour l'addition et F est stable pour la multiplication par un scalaire. Dans la pratique, on peut même montrer ces deux stabilités d'un seul coup en montrant que, pour tout $\lambda \in K$ et tout $(u\,;v) \in F^2$, $\lambda u + v \in F$.

Exemple 16. Montrer que les ensembles suivants sont des espaces vectoriels sur $\mathbb{R}$.

1. $F_1 = \{(x\,;y\,;z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - 2y + 3z = 0\}$.

2. $F_2 = \{A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \mid {}^tA = A\}$.

3. F_3 est l'ensemble des solutions de l'équation différentielle $y' + 3y = 0$.

Propriété 17

Soit E un espace vectoriel et F et G deux sous-espaces vectoriels de E. Alors, $F \cap G$ est un sous-espace vectoriel de E.

Exemple 18. Montrer que $G = \{(x\,;y\,;z) \in \mathbb{R}^3 \mid -x + y - 2z = 0\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ et en déduire que $H = \{(x\,;y\,;z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - 2y + 3z = 0 \text{ et } -x + y - 2z = 0\}$ est un espace vectoriel.

En général, l'union de deux sous-espaces vectoriels n'est pas un espace vectoriel.

Exemple 19. Montrer que $F_1 \cup G = \{(x\,;y\,;z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - 2y + 3z = 0 \text{ ou } -x + y - 2z = 0\}$ n'est pas un espace vectoriel.

III. — Familles de vecteurs et sous-espaces engendrés

1) Familles de vecteurs

Définition 20

Soit E un K-espace vectoriel et $p \in \mathbb{N}^*$. Un p-uplet $\mathcal{F} = (v_1, v_2, ..., v_p)$ d'éléments de E est appelé une **famille de** p **vecteurs** de E.

Exemple 21.

1. $((1\,;0\,;1)\,,(0\,;1\,;2)\,,(4\,;-1\,;1)\,,(1\,;1\,;-1))$ est une famille de 4 vecteurs de $\mathbb{R}^3$.
2. $(\cos, \sin)$ est une famille de 2 vecteurs de $\mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
3. $(1, X, X^2)$ et une famille de 3 vecteurs de $\mathbb{R}_2[X]$.

Définition 22

Soit E un K-espace vectoriel et $\mathcal{F} = (v_1, v_2, ..., v_p)$ une famille de p vecteurs de E. Une **combinaison linéaire** de vecteurs de $\mathcal{F}$ est une somme de la forme

$$\sum_{k=1}^{p} \lambda_k v_k.$$

où λ_1, λ_2, ..., λ_p sont des scalaires.
Le nombre λ_1, λ_2, ..., λ_p sont appelés les **coefficients** de la combinaison linéaire.

Exemple 23.

1. Dans le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$, tout vecteur est combinaison linéaire de 1 et de i.
2. Dans $\mathbb{R}^3$, $u = (2\,;1\,;-2)$ est combinaison linéaire de $v_1 = (1\,;0\,;1)$ et $v_2 = (0\,;1\,;-4)$ car $u = 2v_1 + v_2$.
3. Dans $\mathbb{R}_2[X]$, $P = 2X^2 - X + 2$ est combinaison linéaire de $P_1 = 1$, $P_2 = X + 1$ et $P_3 = X^2 + X + 1$ car $P = 3P_1 - 3P_2 + 2P_3$.

Propriété 24

Soit E un K-espace vectoriel. Toute combinaison linéaire de vecteurs de E est un vecteur de E.

Remarque 25. En particulier, si v_1, v_2, ..., v_p appartiennent tous à un sous-espace vectoriel F de E alors toute combinaison linéaire de ces vecteurs appartient également à F.

2) Sous-espace engendré par une famille de vecteurs

Théorème et définition 26

Soit E un K-espace vectoriel et $\mathcal{F} = (v_1, v_2, ..., v_p)$ une famille de vecteurs de E. L'ensemble des combinaisons linéaires des vecteurs de $\mathcal{F}$ est un sous-espace vectoriel de E appelé le **sous-espace engendré** par $\mathcal{F}$. On le note $\mathrm{Vect}(v_1, v_2, ..., v_p)$ ou $\mathrm{Vect}(\mathcal{F})$.

Remarque 27.

1. On a donc $\mathrm{Vect}(v_1, v_2, ..., v_p) = \{\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_p v_p \mid (\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_p) \in K^p\}$.
2. Si $v_1, ..., v_p$ appartiennent à un sous-espace vectoriel F de E alors $\mathrm{Vect}(v_1, ..., v_p) \subset F$.
3. Un espace engendré par un vecteur non nul est appelé **droite vectorielle**.

Exemple 28.

1. En tant que $\mathbb{R}$-espace vectoriel, $\mathbb{C} = \mathrm{Vect}(1, i)$.
2. L'ensemble des solutions de l'équation différentielle $y'' + y = 0$ est $\mathrm{Vect}(\cos, \sin)$.

Exemple 29.

1. Dans $\mathbb{R}[X]$, déterminer $\mathrm{Vect}(1, X, X^2, X^3)$.
2. Montrer que $F_4 = \{(a + 2b\,; a - b\,; -3a + 5b) \mid (a\,; b) \in \mathbb{R}^2\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

IV. — Familles libres, familles génératrices, bases

1) Familles libres

Définition 30

Soit E un K-espace vectoriel et $\mathcal{F} = (v_1, v_2, ..., v_p)$ une famille de vecteurs de E.

- On dit que $\mathcal{F}$ est une **famille libre** si

$$\forall (\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_p) \in K^p \qquad \sum_{k=1}^{p} \lambda_k v_k = 0_E \iff (\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_p) = (0, 0, ..., 0).$$

  Autrement dit, une famille est libre si la seule combinaison linéaire de ses vecteurs qui soit nulle est la combinaison dont tous les coefficients sont nuls.
- Si la famille $\mathcal{F}$ n'est pas libre, on dit qu'elle est **liée**.

Exemple 31.

1. Montrer que $(1, X, X^2)$ est une famille libre de $\mathbb{R}_2[X]$.
2. Montrer que $(X^2 + X + 1, X^2 - X + 1, X^2 + X - 1)$ est une famille libre de $\mathbb{R}[X]$.
3. Montrer que $(\cos, \sin)$ est une famille libre de $\mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
4. Montrer que $((0, 1), (1, 1), (1, 2))$ est une famille liée de $\mathbb{R}^2$.

Remarque 32. Toute famille de vecteurs contenant 0_E est liée car $1 \cdot 0_E = 0_E$.

Propriété 33

Soit E un K-espace vectoriel et u et v des vecteurs de E.

1. La famille (u) est libre si et seulement si $u \neq 0_E$.
2. La famille (u, v) est libre si et seulement si u et v ne sont pas colinéaires c'est-à-dire si et seulement si, pour tout réel λ, $u \neq \lambda v$ et $v \neq \lambda u$.

Remarque 34. Si (u, v) est une famille libre d'un espace vectoriel E alors $\mathrm{Vect}(u, v)$ est appelé un **plan vectoriel**. Ainsi, l'ensemble des solutions de l'équation différentielle $y'' + y = 0$ est le plan vectoriel engendré par cos et sin.

Propriété 35

Soit E un K-espace vectoriel et $\mathcal{F}$ une famille de vecteurs de E. La famille $\mathcal{F}$ est libre si et seulement si aucun vecteur de $\mathcal{F}$ n'est combinaison linéaire des autres vecteurs de $\mathcal{F}$.

Remarque 36. On en déduit qu'une famille est liée si et seulement si on peut écrire un de ses vecteurs comme combinaison linéaire des autres vecteurs.

Méthode 37

- Pour montrer qu'une famille est libre, on écrit une combinaison linéaire nulle et on montre que tous les coefficients sont égaux à 0.
- Pour montrer qu'une famille est liée, on essaie d'exprimer un vecteur en fonction des autres.

Exemple 38. On se place dans $\mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. On considère les fonctions

$$f_0 : x \longmapsto 1 \qquad f_1 : x \longmapsto \cos(x) \qquad \text{et} \qquad f_2 : x \longmapsto \cos(2x).$$

1. La famille (f_0, f_1, f_2) est-elle libre ?

2. La famille (f_0, f_1^2, f_2) est-elle libre ?

Propriété 39

Soit E un K-espace vectoriel, $\mathcal{F}$ une famille de vecteurs de E et $\mathcal{G}$ une famille obtenue à partir de $\mathcal{F}$ en enlevant éventuellement des vecteurs. Si $\mathcal{F}$ est libre alors $\mathcal{G}$ est libre.

2) Familles génératrices

Définition 40

Soit E un K-espace vectoriel et $\mathcal{F}$ une famille de vecteurs de E. On dit que $\mathcal{F}$ est une **famille génératrice** (de E) si $E = \mathrm{Vect}(\mathcal{F})$.
Autrement dit, une famille $(v_1, v_2, ..., v_p)$ de vecteurs de E est génératrice si, pour tout vecteur $v \in E$, il existe $(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_p) \in K^p$ tel que $v = \sum_{k=1}^{p} \lambda_k v_k$.

Exemple 41.

1. Déterminer une famille génératrice de $\mathbb{R}_2[X]$.

2. Déterminer une famille génératrice de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

3. Déterminer une famille génératrice de $F_1 = \{(x\,;y\,;z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - 2y + 3z = 0\}$.

Remarque 42. Par définition, une famille de vecteurs $\mathcal{F}$ est génératrice de l'espace vectoriel $\mathrm{Vect}(\mathcal{F})$.

Propriété 43

Soit E un K-espace vectoriel, $\mathcal{F}$ une famille de E et $\mathcal{G}$ une famille obtenue à partir de $\mathcal{F}$ en ajoutant éventuellement des vecteurs. Si $\mathcal{F}$ est génératrice alors $\mathcal{G}$ est génératrice.

3) Bases

Définition 44

Soit E un K-espace vectoriel. On dit qu'une famille de vecteurs $\mathcal{F}$ de E est une **base** de E si $\mathcal{F}$ est à la fois libre et génératrice de E.

Exemple 45.

1. Déterminer une base $\mathbb{R}_2[X]$.
2. Déterminer une base $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
3. Déterminer une base de $F_1 = \{(x\,;y\,;z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - 2y + 3z = 0\}$.

Théorème 46

Soit E un K-espace vectoriel et $\mathcal{F}$ une famille de vecteurs de E. Alors, $\mathcal{F}$ est une base de E si et seulement si tout vecteur de E s'écrit de manière unique comme combinaison linéaire des vecteurs de $\mathcal{F}$.
Autrement dit, une famille $(v_1, v_2, ..., v_p)$ de vecteurs de E est une base de E si et seulement si, pour tout vecteur v de E, il existe un unique p-uplet $(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_p) \in K^p$ tel que

$$v = \sum_{k=1}^{p} \lambda_k v_k.$$

Exemple 47. La famille $(1, X, X^2, X^3)$ est une base de $\mathbb{R}_3[X]$ car, par théorème, tout polynôme de degré inférieur ou égal à 3 s'écrit de manière unique sous la forme $aX^3 + bX^2 + cX + d$ avec $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$ c'est-à-dire comme combinaison linéaire de 1, X, X^2 et X^3.

V. — Espaces vectoriels de dimension finie

1) Définition

Définition 48

On dit qu'un K-espace vectoriel E est **de dimension finie** s'il admet une base (finie) ou s'il est réduit à $\{0_E\}$.

Exemple 49. Les espaces $\mathbb{R}_2[X]$, $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et F_1 sont des espaces de dimension finie. En revanche, les espaces $\mathbb{R}[X]$ et $\mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ ne sont pas de dimension finie.

Théorème et définition 50

Soit E un K-espace vectoriel E de dimension finie. Si $E \neq \{0_E\}$ alors toutes les bases de E ont le même cardinal. Ce nombre est appelé la **dimension** de E. On le note $\dim(E)$.
Si $E = \{0_E\}$, on convient que $\dim(E) = 0$.

2) Exemples à connaître

Exemple 51. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La famille $((1,0,...,0),(0,1,0,...0),...,(0,0,...,1))$ est une base de K^n appelée la base canonique de K^n. On en déduit que $\dim(K^n) = n$.

Exemple 52. Soit $n \in \mathbb{N}$. La famille $(1, X, X^2, ..., X^n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$ appelée la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$. On en déduit que $\dim(\mathbb{R}_n[X]) = n + 1$.

Exemple 53. Soit n et m deux entiers naturels. Pour tout $(i\,;j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,m]\!]$, on définit la matrice élémentaire $E_{i,j}$ comme la matrice dont tous les coefficients sont nuls sauf le coefficient d'indices i et j qui vaut 1 :

$$\begin{array}{rcl} & \begin{array}{cccccc} & & & j^{\text{ème}} \\ & & & \text{colonne} & & \\ & & & \downarrow & & \end{array} & \\ E_{i,j} = & \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \\ \\ \\ \longleftarrow i^{\text{ème}}\text{ ligne} \\ \\ \\ \end{array} \end{array}$$

La famille $(E_{1,1}, E_{1,2}, ..., E_{n,1}, E_{2,1}, ..., E_{2,n}, ..., E_{1,m}, ..., E_{n,m})$ est une base de $\mathscr{M}_{n,m}(K)$ appelée base canonique de $\mathscr{M}_{n,m}(K)$. On en déduit que $\dim(\mathscr{M}_{n,m}(K)) = n \times m$.

Remarque 54. Les espaces vectoriels de dimension 1 sont les droites vectorielles et les espaces vectoriels de dimension 2 sont les plans vectoriels.

3) Liens entre dimension, famille libre et famille génératrice

Propriété 55

Soit E un K-espace vectoriel de dimension n et $\mathcal{F}$ une famille de p vecteurs de E.

1. Si $\mathcal{F}$ est libre alors $p \leqslant n$.

2. Si $\mathcal{F}$ est génératrice alors $p \geqslant n$.

3. Si $p = n$ alors il y a équivalente entre

- $\mathcal{F}$ est libre
- $\mathcal{F}$ est génératrice
- $\mathcal{F}$ est une base.

Remarque 56. Soit E un espace vectoriel de dimension n.

1. Une famille de p vecteurs avec $p > n$ est liée et une famille de p vecteurs avec $p < n$ n'est pas génératrice.

2. Pour montrer qu'une famille de n vecteurs de E est une base, il suffit de montrer qu'elle est libre ou qu'elle est génératrice.

Exemple 57.

1. Justifier que $\mathcal{B}_1 = (X^2+X+1, X^2-X+1, X^2+X-1)$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.
2. Justifier que $\mathcal{B}_2 = ((1,1),(1,0))$ est une base de $\mathbb{R}^2$.

4) Dimension d'un sous-espace

Propriété 58

Soit E un K-espace vectoriel de dimension finie et F un sous-espace vectoriel de E.

1. F est un espace vectoriel de dimension finie et $\dim(F) \leqslant \dim(E)$.
2. Si $\dim(F) = \dim(E)$ alors $F = E$.

VI. — Représentation matricielle et rang d'une famille de vecteurs

1) Représentation matricielle d'une famille de vecteurs dans une base

On considère un K-espace vectoriel E de dimension finie n et on note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, ..., e_n)$ une base de E.

Par théorème, tout vecteur v de E peut s'écrire de manière unique sous la forme

$$v = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \cdots + \lambda_n e_n.$$

Définition 59

Avec les notations précédentes,

1. Les scalaires λ_1, λ_2, ..., λ_n sont appelés les **coordonnées de v dans la base $\mathcal{B}$**.
2. la matrice colonne $\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$ est appelé la **matrice des coordonnées v dans la base $\mathcal{B}$** et on la note $\mathcal{M}at_{\mathcal{B}}(v)$.
3. Si $\mathcal{F} = (v_1, v_2, ..., v_p)$ est une famille de p vecteurs de E, on appelle **matrice de $\mathcal{F}$ dans la base $\mathcal{B}$** et on note $\mathcal{M}at_{\mathcal{B}}(\mathcal{F})$ la matrice de $\mathscr{M}_{n,p}(K)$ telle que, pour tout $j \in [\![1,p]\!]$, la j-ème colonne de $\mathcal{M}at_{\mathcal{B}}(\mathcal{F})$ est égale à la matrice colonne $\mathcal{M}at_{\mathcal{B}}(v_j)$.

Exemple 60.

1. Déterminer la matrice de la famille $\mathcal{F}_1 = (X^2+4X-1, X+1)$ dans la base canonique $\mathcal{B}_{\text{can}}$ de $\mathbb{R}_2[X]$ puis dans la base $\mathcal{B}_1$ de l'exemple 57.
2. Déterminer la matrice de la famille $\mathcal{F}_2 = ((-1,3),(7,-2))$ dans la base canonique $\mathcal{B}_{\text{can}}$ de $\mathbb{R}^2$ puis dans la base $\mathcal{B}_2$ de l'exemple 57.

2) Rang d'une famille de vecteurs

Définition 61

Soit E un espace de dimension finie et $\mathcal{F}$ une famille de vecteurs de E. On appelle **rang** de $\mathcal{F}$ et on note $\mathrm{rg}(\mathcal{F})$ la dimension de $\mathrm{Vect}(\mathcal{F})$.

Remarque 62. Si la famille $\mathcal{F}$ est libre alors c'est une base de $\mathrm{Vect}(\mathcal{F})$ donc $\mathrm{rg}(\mathcal{F}) = \mathrm{Card}(\mathcal{F})$.

Théorème 63

Soit E un espace vectoriel de dimension finie, $\mathcal{F}$ une famille de vecteurs de E et $\mathcal{B}$ une base de E. Alors,

$$\mathrm{rg}(\mathcal{F}) = \mathrm{rg}(\mathcal{M}at_{\mathcal{B}}(\mathcal{F})).$$

Remarque 64. Autrement dit, la dimension de l'espace engendré par une famille de vecteurs est égale aux nombres de pivots de la matrice de cette famille dans n'importe quelle base de E.

Exemple 65. Déterminer de deux façons différentes le rang de la famille de $\mathbb{R}_2[X]$:

$$\mathcal{F} = (X^2 - X + 1, 2X^2 + X + 2, (X+1)^2, 3X)$$

Propriété 66

Soit E un K-espace vectoriel de dimension finie et $\mathcal{F} = (v_1, v_2, ..., v_p)$ une famille de vecteurs de E.

1. $\mathcal{F}$ est libre si et seulement si $\mathrm{rg}(\mathcal{F}) = p$;
2. $\mathcal{F}$ est génératrice si et seulement si $\mathrm{rg}(\mathcal{F}) = \dim(E)$
3. $\mathcal{F}$ est une base si et seulement si $\mathrm{rg}(\mathcal{F}) = p = \dim(E)$.

Exemple 67. Démontrer que, quels que soient les éléments a, b, c, d, e et f de K, la famille $((1, a, b, c), (0, 2, d, e), (0, 0, 3, f), (0, 0, 0, 4))$ est une base de K^4.

VII. — Exercices

Exercice 1. Dans chacun des cas suivants, montrer que F_i est un sous-espace vectoriel de E.

1. $E = \mathbb{R}^3$, $F_1 = \{(x\,;y\,;z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2y = 0\}$.
2. $E = \mathbb{R}^3$, $F_2 = \{(x\,;y\,;z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + 3z = 0\}$
3. $E = \mathbb{R}^3$, $F_3 = \{(x\,;y\,;z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2y = 0 \text{ et } x + y + 3z = 0\}$.
4. $E = \mathbb{R}[X]$, $F_4 = \{P \in \mathbb{R}[X] \mid P(1) = 0\}$
5. $E = \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, $F_5 = \{M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \mid AM = MA\}$ où $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$
6. $E = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $F_6 = \{f \in E \mid f \text{ est dérivable}\}$

Exercice 2. Les ensembles suivants sont-ils des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^2$?

1. $A = \{(x\,;y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \leqslant 0\}$.

2. $B = \{(x\,;y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 0\}$.

3. $C = \{(x\,;y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = y\}$.

4. $D = \{(x\,;y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y = 1\}$.

Exercice 3. Les ensembles suivants sont-ils des sous-espaces vectoriels de $E = \mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$?

1. $A = \{f \in \mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid f \text{ est monotone sur } \mathbb{R}\}$.

2. $B = \{f \in \mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid f(0) = 0\}$.

3. $C = \{f \in \mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid \exists x \in \mathbb{R},\ f(x) = 0\}$.

4. $D = \{f \in \mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid f \text{ est impaire}\}$.

Exercice 4. On considère les ensembles

$$F = \{(x\,;y\,;z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y - z = 0\} \qquad \text{et} \qquad G = \{(a-b\,;a+b\,;a-3b) \mid (a\,;b) \in \mathbb{R}^2\}.$$

1. Montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$.

2. Déterminer $F \cap G$.

Exercice 5. On considère les vecteurs $u = (-4\,;4\,;3)$, $v = (-3\,;2\,;1)$, $s = (-1\,;2\,;2)$ et $t = (-1\,;6\,;7)$ de $\mathbb{R}^3$. Montrer que $\mathrm{Vect}(u, v) = \mathrm{Vect}(s, t)$.

Exercice 6. On considère les vecteurs $u = (1\,;1\,;1)$ et $v = (1\,;0\,;-1)$ de $\mathbb{R}^3$. Montrer que

$$\mathrm{Vect}(u, v) = \{(2a\,;a+b\,;2b) \mid (a\,;b) \in \mathbb{R}^2\}.$$

Exercice 7. Les familles de vecteurs de $\mathbb{R}^3$ suivantes sont-elles libres ?

1. $\mathcal{F}_1 = (v_1, v_2)$ avec $v_1 = (1\,;0\,;1)$ et $v_2 = (1\,;2\,;2)$.

2. $\mathcal{F}_2 = (v_1, v_2, v_3)$ avec $v_1 = (1\,;0\,;0)$, $v_2 = (1\,;1\,;0)$ et $v_3 = (1\,;1\,;1)$.

3. $\mathcal{F}_3 = (v_1, v_2, v_3)$ avec $v_1 = (1\,;2\,;1)$, $v_2 = (2\,;1\,;-1)$ et $v_3 = (1\,;-1\,;-2)$.

4. $\mathcal{F}_4 = (v_1, v_2, v_3)$ avec $v_1 = (1\,;-1\,;1)$, $v_2 = (2\,;-1\,;3)$ et $v_3 = (-1\,;1\,;-1)$.

Exercice 8. Dans $\mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, on considère :

$$f_1 = \cos \qquad f_2 : x \longmapsto x\cos(x) \qquad f_3 = \sin \qquad \text{et} \qquad f_4 : x \longmapsto x\sin(x).$$

La famille (f_1, f_2, f_3, f_4) est-elle libre ?

Exercice 9. Soit E un K-espace vectoriel et (u, v, w) une famille libre de E. On pose $e = v + w$, $f = u + w$ et $g = u + v$.

Montrer que (e, f, g) est une famille libre de E.

Exercice 10. Soit $F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid -x + 2y + 3z - t = 0\}$.

1. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$.

2. Déterminer une famille génératrice de F.

Exercice 11. On considère $e_1 = (1\,;1\,;1)$, $e_2 = (1\,;1\,;0)$ et $e_3 = (0\,;1\,;1)$. Montrer que $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ est une base $\mathbb{R}^3$.

Exercice 12. Soit $F = \{(x\,;y\,;z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x + y + z = 0 \text{ et } 4x + y = 0\}$.

1. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
2. Déterminer une base de F.

Exercice 13. Dans $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$, on considère les quatre matrices :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad D = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que (A, B, C, D) est une base de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.
2. Écrire la matrice $M = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$ comme combinaison linéaire de (A, B, C, D).

Exercice 14. On considère les polynômes de $\mathbb{R}[X]$ suivants :

$$P_0(X) = 1, \qquad P_1(X) = X + 2, \qquad P_2(X) = X^2 + 4X - 3, \qquad P_3(X) = X^3 + 6X^2 - X.$$

1. Montrer que la famille (P_0, P_1, P_2, P_3) est libre.
2. Rappeler la dimension de $\mathbb{R}_3[X]$. Que peut-on en déduire ?
3. Déterminer $\mathrm{Vect}(P_0, P_1, P_2, P_3)$.
4. Quelles sont les coordonnées du polynôme $Q = X^3 + X^2 + X + 1$ dans les bases $\mathcal{B} = (1, X, X^2, X^3)$ et $\mathcal{C} = (P_0, P_1, P_2, P_3)$ de $\mathbb{R}_3[X]$?

Exercice 15. Soit $\mathcal{S}_3(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$, c'est-à-dire l'ensemble des matrices $A \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ telles que ${}^tA = A$.

1. Montrer que $\mathcal{S}_3(\mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.
2. Déterminer $\dim(\mathcal{S}_3(\mathbb{R}))$.

Exercice 16. On considère l'ensemble

$$E = \{f \in \mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid \exists\,(a\,;b\,;c) \in \mathbb{R}^3,\ \forall x \in \mathbb{R}\ f(x) = (ax^2 + bx + c)\cos(x)\}.$$

1. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
2. Déterminer une base de E et en déduire la dimension de E.

Exercice 17. Dans $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$, on considère les deux ensembles suivants :

$$F = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \;\middle|\; a + d = 0 \right\} \qquad \text{et} \qquad G = \mathrm{Vect}(A, B, C)$$

où $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.
2. Déterminer une famille génératrice de F.
3. En déduire une base de F puis sa dimension.
4. La famille (A, B, C) est-elle libre ? En déduire une base de G, ainsi que sa dimension.
5. **a.** Justifier que A, B et C sont des éléments de F.

   b. En déduire que $G \subset F$.
6. Démontrer que $G = F$.

Exercice 18. Dans $\mathbb{R}_3[X]$, pour tout réel α, on considère $F_\alpha = \{P \in \mathbb{R}_3[X] \mid P(\alpha) = 0\}$.

1. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Démontrer que F_α est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_3[X]$.
2. Déterminer la dimension du sous-espace $G = F_1 \cap F_2$.
3. On pose $H = \{(X^2 - 3X + 2)Q(X) \mid Q \in \mathbb{R}_1[X]\}$.
   Démontrer que H est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_3[X]$ et en déterminer la dimension.
4. Démontrer que $G = H$.

Exercice 19. Dans $\mathbb{R}^4$, on considère, d'une part, les vecteurs

$$u = (1, 0, 1, 0) \qquad v = (0, 1, -1, 0) \qquad \text{et} \qquad w = (1, 1, 1, 1)$$

et, d'autre part, les vecteurs

$$x = (0, 0, 1, 0) \qquad \text{et} \qquad y = (1, 1, 0, -1).$$

On pose $F = \text{Vect}(u, v, w)$ et $G = \text{Vect}(x, y)$.

1. Déterminer les dimensions de F et de G.
2. On pose $H = F \cap G$.
   - **a.** Justifier que $\dim(H) \in \{0, 1, 2\}$.
   - **b.** Montrer que si $\dim(H) = 2$ alors $x \in F$ et aboutir à un contradiction.
   - **c.** Montrer que si $\dim(H) = 0$ alors (u, v, w, x, y) est libre et aboutir à une contradiction.
   - **d.** En déduire la dimension de H.

Exercice 20. Dans $\mathbb{R}_3[X]$, on considère les polynômes

$$P_1 = X^3 + 1 \qquad P_2 = X^3 + X \qquad P_3 = X^3 + X^2 \qquad \text{et} \qquad P_4 = X^3.$$

On pose $\mathcal{B} = (P_1, P_2, P_3, P_4)$.

1. Écrire la matrice A de $\mathcal{B}$ dans la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$.
2. Montrer que $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}_3[X]$.
3. Écrire la matrice B de $(1, X, X^2, X^3)$ dans la base $\mathcal{B}$.
4. Calculer AB. Qu'en déduit-on ?

Exercice 21. Dans $\mathbb{R}^4$, déterminer le rang des familles de vecteurs suivantes :

1. (u, v, w) avec $u = (1, 1, 1, 1)$, $v = (1, -1, 1, -1)$ et $w = (1, 0, 1, 1)$.
2. (u, v, w, x) avec $u = (1, 1, 0, 1)$, $v = (1, -1, 1, 0)$, $w = (2, 0, 1, 1)$ et $x = (0, 2, -1, 1)$.

Exercice 22.

1. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Montrer que si, pour tout réel x, $P(\mathrm{e}^x) = 0$ alors P est le polynôme nul.
2. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on note $f_k : x \longmapsto \mathrm{e}^{kx}$. Déduire de la question précédente que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la famille $(f_0, f_1, ..., f_n)$ est une famille libre de $\mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
3. Conclure que $\mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ n'est pas de dimension finie.

Exercice 23. Soit E un K-espace vectoriel de dimension n et $\mathcal{B} = (e_1, e_2, ..., e_n)$ une base de E. Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, on pose $f_i = e_1 + e_2 + \cdots + e_i$.

Montrer que $\mathcal{B}' = (f_1, f_2, ..., f_n)$ est une base de E.

Exercice 24. Soit E un K-espace vectoriel et F et G deux sous-espaces vectoriels de E. Montrer que $F \cup G$ est un espace vectoriel si et seulement si $F \subset G$ ou $G \subset F$.