♦ Chapitre 1. Rappels et compléments sur les sommes et les suites

I. — Somme simple : notation et exemples

1) Notation $\sum$

Définition 1

Soit m et n deux entiers naturels tels que $m \leqslant n$. Pour tous nombres complexes a_m, a_{m+1}, ..., a_n,

$$\sum_{k=m}^{n} a_k = a_m + a_{m+1} + \cdots + a_n.$$

Remarque 2. Dans l'écriture $\displaystyle\sum_{k=m}^{n} a_k$,

1. on dit que a_k est le terme général de la somme et que k est l'indice de sommation. Cet indice est une variable muette : la valeur de la somme dépend de m et n mais elle ne dépend pas de k ;
2. par convention, si $m > n$, la somme est nulle ;
3. cette somme contient $n - m + 1$ termes.

Exemple 3.

1. Calculer les sommes suivantes : $S_1 = \displaystyle\sum_{k=1}^{4} \frac{k}{k+1}$, $S_2 = \displaystyle\sum_{j=1}^{3} j^3$ $S_3 = \displaystyle\sum_{k=1}^{7} \mathrm{i}^k$ (où $\mathrm{i}^2 = -1$).
2. Écrire à l'aide du symbole $\sum$ les sommes suivantes : $S_4 = 3^3 + 4^4 + 5^5 + 6^6 + 7^7$, $S_5 = 1 + 4 + 7 + 10 + 13 + 16 + 19$ et $S_6 = 1 + 3 + 9 + 27 + 81 + 243$.

Solution.

1. $S_1 = \dfrac{1}{2} + \dfrac{2}{3} + \dfrac{3}{4} + \dfrac{4}{5} = \dfrac{30 + 40 + 45 + 48}{60} = \dfrac{163}{60}$.
   $S_2 = 1^3 + 2^3 + 3^3 = 1 + 8 + 27 = 36$.
   $S_3 = \mathrm{i}^1 + \mathrm{i}^2 + \mathrm{i}^3 + \mathrm{i}^4 + \mathrm{i}^5 + \mathrm{i}^6 + \mathrm{i}^7 = \mathrm{i} - 1 - \mathrm{i} + 1 + \mathrm{i} - 1 - \mathrm{i} = -1$.
2. $S_4 = \displaystyle\sum_{k=3}^{7} k^k$, $S_5 = \displaystyle\sum_{k=0}^{6} (3k+1)$ et $S_6 = \displaystyle\sum_{k=1}^{5} 3^k$.

2) Suites arithmétiques

Définition 4

On dit qu'une suite $(u_n)_{n \geqslant N}$ est arithmétique s'il existe un réel r tel que, pour tout $n \geqslant N$, $u_{n+1} = u_n + r$. Dans ce cas, le nombre r est appelé la raison de la suite (u_n).

$$u_N \xrightarrow{+r} u_{N+1} \xrightarrow{+r} u_{N+2} \xrightarrow{+r} \dots$$

Propriété 5

Soit $r \in \mathbb{R}$. Une suite $(u_n)_{n\geqslant N}$ est arithmétique de raison r si et seulement si, pour tous entiers p et n supérieurs ou égaux à N,

$$u_n = u_p + (n-p)r.$$

Propriété 6. — Somme des termes d'une suite constante

Soit a un réel et m et n deux entiers tels que $m \leqslant n$. Alors,

$$\sum_{k=m}^{n} a = (n-m+1)a.$$

Remarque 7. En particulier, si $m \leqslant n$ alors $\displaystyle\sum_{k=m}^{n} 1 = n-m+1$.

Propriété 8

Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Démonstration. Soit $n \in \mathbb{N}$. Notons $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k$. Alors,

$$\begin{aligned} 2S_n &= 1+2+\cdots+n-1+n+1+2+\cdots+n-1+n \\ &= (1+n)+(2+n-1)+\cdots+(n+1+2)+(n+1) = n(n+1) \end{aligned}$$

donc $S_n = \dfrac{n(n+1)}{2}$. □

Exemple 9. Calculer la somme des entiers de 1 à 100.

Solution. $\displaystyle\sum_{k=1}^{100} k = \frac{100\times 101}{2} = 50\times 101 = 5\,050.$

Théorème 10. — Somme de termes consécutifs d'une suite arithmétique

Soit $(u_n)_{n\geqslant N}$ une suite arithmétique. Alors, pour tous entiers p et n tels que $n \geqslant m \geqslant N$,

$$u_m + u_{m+1} + u_{m+2} + \cdots + u_n = (n-m+1)\frac{u_m+u_n}{2}$$

Démonstration. Soit m et n des entiers tels que $n \geqslant m \geqslant N$. Notons r la raison de (u_n). Alors, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $u_k = u_m + (k-m)r$ donc

$$\begin{aligned} \sum_{k=m}^{n} u_k &= u_m + u_m + r + u_n + 2r + \cdots + u_m + (n-m)r \\ &= (n-m+1)u_m + r\sum_{k=1}^{n-m} k = (n-m+1)u_m + r\frac{(n-m)(n-m+1)}{2} \\ &= (n-m+1)\times\frac{2u_m + r(n-m)}{2} = (n-m+1)\frac{u_m+u_m+r(n-m)}{2} \\ &= (n_m+1)\frac{u_m+u_n}{2} \end{aligned}$$

□

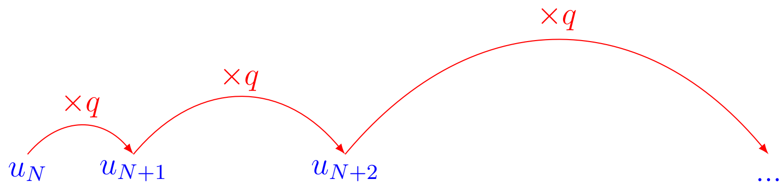
Exemple 11. Calculer $\displaystyle\sum_{k=5}^{15}(2k+1)$.

Solution. La suite (u_n) définie, pour tout tout $n \in \mathbb{N}$, par $u_n = 2n+1$ est une suite arithmétique donc $\displaystyle\sum_{k=5}^{15}(2k+1) = (15-5+1)\frac{2\times 5+1+2\times 15+1}{2} = 11 \times \frac{42}{2} = 11 \times 21 = 231.$

3) Suites géométriques

Définition 12

On dit qu'une suite $(u_n)_{n\geqslant N}$ est géométrique s'il existe un réel q tel que, pour tout $n \geqslant N$, $u_{n+1} = q \times u_n$. Dans ce cas, le nombre q est appelé la raison de la suite $(u_n)_{n\geqslant N}$.



Propriété 13

Soit $q \in \mathbb{R}^*$. Une suite $(u_n)_{n\geqslant N}$ est géométrique de raison q si et seulement si, pour tous entiers p et n supérieurs ou égaux à N,

$$u_n = q^{n-p}u_p.$$

Propriété 14

Soit $q \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}$. On pose $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} q^k$.

1. Si $q \neq 1$ alors

$$S_n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}.$$

2. Si $q = 1$ alors $S_n = n+1$.

Démonstration.

1. On suppose $q \neq 1$. Alors,

$$\begin{aligned}(1-q)S_n &= (1-q)\sum_{k=0}^{n} q^k = \sum_{k=0}^{n} q^k - q\sum_{k=0}^{n} q^k \\ &= 1+q+q^2+\cdots+q^n - q(1+q+\cdots+q^n) \\ &= 1+q+q^2+\cdots+q^n - q - q^2 - \cdots - q^n - q^{n+1} \\ &= 1-q^{n+1}\end{aligned}$$

Comme $q \neq 1$, $1-q \neq 0$ donc $S_n = \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}$.

2. Si $q=1$ alors $S_n = \sum_{k=0}^{n} 1^k = \sum_{k=0}^{n} 1 = n+1$.

$\square$

Exemple 15. Calculer $\sum_{k=0}^{10} \mathrm{i}^k$ et $\sum_{k=0}^{n} 2^k$ où $n \in \mathbb{N}^*$.

Solution. Comme $\mathrm{i} \neq 1$, $\sum_{k=0}^{10} \mathrm{i}^k = \frac{1-\mathrm{i}^{11}}{1-\mathrm{i}}$. Or, $\mathrm{i}^2 = -1$ donc $\mathrm{i}^{11} = \mathrm{i}^{10+1} = \mathrm{i}^{10} \times \mathrm{i} = (\mathrm{i}^2)^5 \times \mathrm{i} = (-1)^5 \times \mathrm{i} = -\mathrm{i}$ donc

$$\sum_{k=0}^{10} \mathrm{i}^k = \frac{1-(-\mathrm{i})}{1-\mathrm{i}} = \frac{1+\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}} = \frac{(1+\mathrm{i})^2}{1^2+1^2} = \frac{1+2\mathrm{i}-1}{2} = \mathrm{i}.$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Comme $2 \neq 1$,

$$\sum_{k=0}^{n} 2^k = \frac{1-2^{n+1}}{1-2} = \frac{1-2^{n+1}}{-1} = 2^{n+1}-1.$$

Théorème 16. — Somme de termes consécutifs d'une suite géométrique

Soit $(u_n)_{n \geqslant N}$ une suite géométrique de raison q. Soit m et n des entiers tels que $n \geqslant m \geqslant N$.

1. Si $q \neq 1$ alors

$$\sum_{k=m}^{n} u_k = u_m \frac{1-q^{n-m+1}}{1-q}.$$

2. Si $q = 1$ alors

$$\sum_{k=m}^{n} u_k = (n-m+1)u_m.$$

Démonstration.

1. Supposons $q \neq 1$. Alors,

$$\sum_{k=m}^{n} u_k = \sum_{k=m}^{n} u_m q^{k-m} = u_m q^0 + u_m q^1 + \cdots + u_m q^{n-m} = u_m \sum_{j=0}^{n-m} q^j = u_m \frac{1-q^{n-m+1}}{1-q}.$$

2. Si $q=1$ alors, pour tout entier $k \geqslant m$, $u_k = u_m \times 1^{k-m} = u_m \times 1 = u_m$ donc $\sum_{k=m}^{n} u_k = \sum_{k=m}^{n} u_m = (n-m+1)u_m$.

$\square$

Remarque 17. Un moyen mnémotechnique pour retenir la formule générale est : la somme de termes consécutifs d'une suite géométrique de raison $q \neq 1$ est donnée par

$$(1^{\text{er}} \text{ terme}) \times \frac{1-q^{\text{nombre de termes}}}{1-q}.$$

Attention !! de u_m à u_n, il y a $n-m+1$ termes et non pas $n-m$.

Exemple 18. Soit (u_n) une suite géométrique de premier terme $u_0 = 5$ et de raison $q = \frac{1}{2}$. Calculer $\sum_{k=3}^{10} u_k$.

Solution. Comme $q \neq 1$,

$$\begin{aligned}\sum_{k=3}^{10} u_k &= u_3 \times \frac{1-(\frac{1}{2})^{10-3+1}}{1-\frac{1}{2}} = 5 \times \left(\frac{1}{2}\right)^3 \times \frac{1-(\frac{1}{2})^8}{\frac{1}{2}} \\ &= 5 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(1-\frac{1}{2^8}\right) = \frac{5}{4} \times \left(1 - \frac{1}{256}\right) \\ &= \frac{5}{4} \times \frac{255}{256} = \frac{1\,275}{1\,024}\end{aligned}$$

4) Sommes de premiers carrés d'entiers

Propriété 19

Soit n un entier naturel. Alors,

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Démonstration. On raisonne par récurrence sur n. Pour $n = 0$, $\sum_{k=1}^{0} k^2 = 0$ (car $1 > 0$) et $\frac{0 \times (0+1) \times (2 \times 0 + 1)}{6} = 0$ donc l'égalité est vraie.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$. Alors,

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1} k^2 &= \sum_{k=1}^{n} k^2 + (n+1)^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 \\ &= \frac{n(n+1)(2n+1) + 6(n+1)^2}{6} = \frac{(n+1)\left[n(2n+1) + 6(n+1)\right]}{6} \\ &= \frac{(n+1)(2n^2+n+6n+6)}{6} = \frac{(n+1)(2n^2+7n+6)}{6}\end{aligned}$$

Or, $(n+1+1)((2(n+1)+1)) = (n+2)(2n+3) = 2n^2+3n+4n+6 = 2n^2+7n+6$ donc $\sum_{k=1}^{n+1} k^2 = \frac{(n+1)(n+1+1)(2(n+1)+1)}{6}$ et ainsi l'égalité est établie rang $n+1$.

Par le principe de récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$. $\square$

Exemple 20. Calculer $\sum_{k=5}^{10} k^2$.

Solution. $\sum_{k=5}^{10} k^2 = \sum_{k=1}^{10} k^2 - \sum_{k=1}^{4} k^2 = \frac{10 \times 11 \times 21}{6} - \frac{4 \times 5 \times 9}{6} = 385 - 30 = 355.$

5) Formule du binôme de Newton

Propriété 21. — Formule du binôme de Newton

Soit a et b deux nombres complexes. Alors, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$,

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

Démonstration. Par définition,

$$(a+b)^n = \underbrace{(a+b)(a+b)\cdots(a+b)}_{n \text{ fois}}.$$

Lorsqu'on développe un tel produit, on prend, dans chaque parenthèse, soit a soit b. On forme ainsi des termes de la forme $a^k n^{n-k}$. De plus, un tel terme est formé si on a pris a dans k parenthèses et b dans les $n-k$ autres. Il y a donc $\binom{n}{k}$ façons d'obtenir un tel terme (autant que de possibilités pour les parenthèses où l'on choisit a). Ainsi, le développement va donner, pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, $\binom{n}{k}$ termes de la forme $a^k b^{n-k}$ donc

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

□

Exemple 22. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^{2023} \binom{2023}{k} \mathrm{i}^k$.

Solution. On remarque que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^k 1^{n-k}$ donc, par la formule du binôme, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = (1+1)^n = 2^n$.

De même, $\displaystyle\sum_{k=0}^{2023} \binom{2023}{k} \mathrm{i}^k = \sum_{k=0}^{2023} \binom{2023}{k} \mathrm{i}^k 1^{2023-k} = (\mathrm{i}+1)^{2023}$. Or, $(\mathrm{i}+1)^2 = -1+2\mathrm{i}+1 = 2\mathrm{i}$ donc

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{2023} \binom{2023}{k} \mathrm{i}^k &= (1+\mathrm{i})^{2022+1} = (1+\mathrm{i})^{2\times 1011}(1+\mathrm{i}) = \left[(1+\mathrm{i})^2\right]^{1011}(1+\mathrm{i}) \\ &= (2\mathrm{i})^{1011}(1+\mathrm{i}) = 2^{1011}\mathrm{i}^{1011}(1+\mathrm{i}).\end{aligned}$$

De plus, $\mathrm{i}^2 = -1$ donc $\mathrm{i}^4 = (\mathrm{i}^2)^2 = (-1)^2 = 1$ donc

$$\mathrm{i}^{1011} = \mathrm{i}^{1008+3} = \mathrm{i}^{1008}\mathrm{i}^3 = \mathrm{i}^{4\times 252}(-\mathrm{i}) = (\mathrm{i}^4)^{252}(-\mathrm{i}) = 1^{252}(-\mathrm{i}) = -\mathrm{i}.$$

Dès lors, $\displaystyle\sum_{k=0}^{2023} \binom{2023}{k} \mathrm{i}^k = 2^{1011}(-\mathrm{i})(1+\mathrm{i}) = 2^{1011}(-\mathrm{i}+1) = 2^{1011} - 2^{1011}\mathrm{i}$.

II. — Propriétés et techniques de calcul

Propriété 23. — Linéarité

La somme est linéaire, c'est-à-dire que pour tous entiers naturels m et n, tels que $m \leqslant n$, pour tous nombres complexes λ et μ et pour tous nombres complexes a_m, a_{m+1}, ..., a_n, b_m, b_{m+1}, ..., b_n,

$$\sum_{k=m}^{n} (\lambda a_k + \mu b_k) = \lambda \sum_{k=m}^{n} a_k + \mu \sum_{k=m}^{n} b_k.$$

Exemple 24. Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer $S_7 = \sum_{k=1}^{n} (6k^2 + k)$.

Solution. Par linéarité,

$$\begin{aligned} S_7 &= 6 \sum_{k=1}^{n} k^2 + \sum_{k=1}^{n} k = 6 \times \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{n(n+1)}{2} \\ &= \frac{2n(n+1)(2n+1) + n(n+1)}{2} = \frac{n(n+1)\left[2(2n+1)+1\right]}{2} \\ &= \frac{n(n+1)(4n+3)}{2} \end{aligned}$$

Propriété 25. — Relation de Chasles

Pour tous entiers naturels m, n et p tels que $m \leqslant p < n$ et pour tous nombres complexes a_m, a_{m+1}, ..., a_n,

$$\sum_{k=m}^{n} a_k = \sum_{k=m}^{p} a_k + \sum_{k=p+1}^{n} a_k.$$

Propriété 26. — Changement d'indice par translation

Pour tous entiers naturels m, n et p tels que $m \leqslant n$ et pour tous nombres complexes a_m, a_{m+1}, ..., a_n,

$$\sum_{k=m}^{n} a_k = \sum_{k=m+p}^{n+p} a_{k-p} \qquad \text{et} \qquad \sum_{k=m}^{n} a_k = \sum_{k=m-p}^{n-p} a_{k+p}.$$

Exemple 27. Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer

$$S_8 = \sum_{k=0}^{n} (k+1)^2 \qquad S_9 = \sum_{k=0}^{n} 3^{k+4} \qquad S_{10} = \sum_{j=0}^{n} \binom{n+1}{j+1}.$$

Solution.

En faisant le changement d'indice $j = k+1$, on obtient $S_8 = \sum_{j=1}^{n+1} j^2 = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$.

En faisant le changement d'indice $j = k+4$, on obtient

$$S_9 = \sum_{j=4}^{n+4} 3^j = 3^4 \frac{1 - 3^{n+4-4+1}}{1-3} = 81 \times \frac{1 - 3^{n+1}}{-2} = \frac{81}{2}\left(3^{n+1} - 1\right).$$

En faisant le changement d'indice $k = j+1$, on obtient

$$S_{10} = \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n+1}{k} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} - \binom{n+1}{0} = 2^{n+1} - 1.$$

Propriété 28. — Changement d'indice par symétrie

Soit m et n des entiers naturels tels que $m \leqslant n$. Alors, pour tous complexes a_0, a_{m+1}, ..., a_n,

$$\sum_{k=m}^{n} a_{n-k} = \sum_{k=0}^{n-m} a_k.$$

Exemple 29. Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer de 2 façons différentes la somme $S_{11} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} 2^{n-k}$.

Solution.
1ère méthode.

$$\begin{aligned} S_{11} &= \sum_{k=0}^{n} 2^n 2^{-k} = 2^n \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k} = 2^n \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^k = 2^n \frac{1-(\frac{1}{2})^{n+1}}{1-\frac{1}{2}} = 2^n \frac{1-(\frac{1}{2})^{n+1}}{\frac{1}{2}} \\ &= 2^{n+1}\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right] = 2^{n+1}\left[1-\frac{1}{2^{n+1}}\right] = 2^{n+1}-1. \end{aligned}$$

2nde méthode. En posant $j = n-k$, on obtient $S_{11} = \displaystyle\sum_{j=0}^{n} 2^j = \frac{1-2^{n+1}}{1-2} = 2^{n+1}-1$.

Propriété 30. — Somme téléscopique

Soit m et n deux entiers naturels tels que $m \leqslant n$ et a_m, a_{m+1}, ..., a_{n+1} des complexes. Alors,

$$\sum_{k=m}^{n} (a_{k+1} - a_k) = a_{n+1} - a_m \qquad \text{et} \qquad \sum_{k=m}^{n} (a_k - a_{k+1}) = a_m - a_{n+1}.$$

Exemple 31.

1. Calculer, pour tout entier $k > 0$, $\dfrac{1}{k} - \dfrac{1}{k+1}$.

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déduire de la question précédente une expression simplifiée de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$.

Solution.

1. Soit un entier $k > 0$. Alors, $\dfrac{1}{k} - \dfrac{1}{k+1} = \dfrac{k+1-k}{k(k+1)} = \dfrac{1}{k(k+1)}$.

2. On fait apparaître une somme téléscopique,

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} = \frac{1}{1} - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

III. — Sommes doubles

On considère une matrice A à coefficients complexes ayant n lignes et m colonnes (donc $n \times m$ éléments en tout) :

$$A=\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & \cdots & a_{1,m} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \ddots & & a_{2,m} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & a_{n-1,m-1} & a_{n-1,m} \\ a_{n,1} & \cdots & \cdots & a_{n,m-1} & a_{n,m} \end{pmatrix}$$

On peut s'intéresser la somme de tous les coefficients de A qu'on note :

$$\sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant m}} a_{i,j}$$

Cette somme peut être obtenue en sommant d'abord sur les lignes, puis sur les colonnes, ou l'inverse, donc

$$\sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant m}} a_{i,j}=\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{m}a_{i,j}\right)=\sum_{j=1}^{m}\left(\sum_{i=1}^{n}a_{i,j}\right).$$

Le but est de pouvoir « séparer » $a_{i,j}$ par exemple en un terme qui dépend de i et un autre qui ne dépend pas de i.

Exemple 32. Soit m et n deux entiers strictement positifs. Calcul de $S_{12}=\sum\limits_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant m}}(i+ij)$.

Solution. En utilisant la linéarité des sommes simples,

$$\begin{aligned}\sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant m}}(i+ij)&=\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{m}(i+ij)\right)=\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{m}i+i\sum_{j=1}^{m}j\right)=\sum_{i=1}^{n}\left(mi+i\times\frac{m(m+1)}{2}\right)\\&=\sum_{i=1}^{n}\left(m+\frac{m(m+1)}{2}\right)i=\sum_{i=1}^{n}\frac{2m+m(m+1)}{2}\times i=\sum_{i=1}^{n}\frac{m(2+m+1)}{2}\times i\\&=\sum_{i=1}^{n}\frac{m(m+3)}{2}\times i=\frac{m(m+3)}{2}\sum_{i=1}^{n}i\\&=\frac{m(m+3)}{2}\times\frac{n(n+1)}{2}=\frac{nm(n+1)(m+3)}{4}.\end{aligned}$$

Propriété 33

Pour tous entiers naturels non nuls n et m et pour tous nombres complexes a_1, a_2, ..., a_n, b_1, b_2, ..., b_m,

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}a_ib_j=\left(\sum_{i=1}^{n}a_i\right)\left(\sum_{j=1}^{m}b_j\right).$$

Démonstration. Soit n et m des entiers naturels non nuls et a_1, a_2, ..., a_n, b_1, b_2, ..., b_m des nombres complexes. Alors, par linéarité des sommes simples,

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}a_ib_j=\sum_{i=1}^{n}a_i\sum_{j=1}^{m}b_j=\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{m}b_j\right)a_i=\left(\sum_{j=1}^{m}b_j\right)\sum_{i=1}^{n}a_i=\left(\sum_{i=1}^{n}a_i\right)\left(\sum_{j=1}^{m}b_j\right).$$

□

Exemple 34. Retrouver le résultat de l'exemple 32.

Solution. On peut remarquer que

$$\sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant m}}(i+ij)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}i(1+j)=\left(\sum_{i=1}^{n}i\right)\underbrace{\left(\sum_{j=1}^{m}1+j\right)}_{\substack{\text{somme des termes}\\\text{d'une suite}\\\text{arithmétique}}}$$

$$=\frac{n(n+1)}{2}\times\left(m\times\frac{2+1+m}{2}\right)=\frac{nm(n+1)(m+3)}{4}.$$