⧫ Chapitre 15. Géométrie euclidienne dans $\mathbb{R}^n$

Dans tout le chapitre, n désigne un entier naturel non nul.

I. — Produit scalaire dans $\mathbb{R}^n$

1) Définition

Définition 1

Soit $u = (x_1, x_2, ..., x_n)$ et $v = (x'_1, x'_2, ..., x'_n)$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^n$. On définit le produit scalaire canonique de u et v, noté $u \cdot v$, par

$$u \cdot v = \sum_{i=1}^{n} x_i x'_i = x_1 x'_1 + x_2 x'_2 + \cdots + x_n x'_n.$$

Remarque 2. Le produit scalaire de deux vecteurs de $\mathbb{R}^n$ est un réel.

Exemple 3. On considère les vecteurs $u = (1, -1, 2, -1)$ et $v = (1, 0, -1, 1)$ de $\mathbb{R}^4$.
Calculer $u \cdot v$, $u \cdot (2v)$, $(-u) \cdot v$ et $u \cdot (u + v)$.

Remarque 4.

1. Si $n = 1$, on retrouve le produit de deux réels ;
2. Si $n = 2$, on retrouve l'expression du produit scalaire des vecteurs du plan $\overrightarrow{u}(x, y)$ et $\overrightarrow{v}(x', y')$: $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = xx' + yy'$.
3. Si $n = 3$, on retrouve l'expression du produit scalaire des vecteurs de l'espace $\overrightarrow{u}(x, y, z)$ et $\overrightarrow{v}(x', y', z')$: $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = xx' + yy' + zz'$.

Propriété 5

Pour tous vecteurs u, v et w de $\mathbb{R}^n$ et pour tout réel λ,

- $u \cdot v = v \cdot u$ (le produit scalaire est symétrique) ;
- $(\lambda u + v) \cdot w = \lambda(u \cdot w) + v \cdot w$ et $u \cdot (\lambda v + w) = \lambda(u \cdot v) + u \cdot w$ (le produit scalaire est bilinéaire) ;
- $u \cdot u = 0 \iff u = 0_{\mathbb{R}^n}$ (le produit scalaire est défini) ;
- $u \cdot u \geqslant 0$ (le produit scalaire est positif).

Exemple 6. Soit u et v des vecteurs de $\mathbb{R}^n$ tels que $u \cdot u = v \cdot v = 1$. Calculer

$$A = (3u + 2v) \cdot (6u - 4v)$$

2) Norme euclidienne

Définition 7

Soit u un vecteur de $\mathbb{R}^n$. On définit la norme (euclidienne) de u, notée $\|u\|$, par :

$$\|u\| = \sqrt{u \cdot u}.$$

Ainsi, si $u = (x_1, x_2, ..., x_n)$ alors

$$\|u\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}.$$

Exemple 8. Calculer les normes de vecteurs u et v de l'exemple 3.

Remarque 9.

1. Si $n = 1$ alors la norme euclidienne est la valeur absolue.
2. Si $n = 2$ alors la norme euclidienne de (x, y) correspond à la norme du vecteur du plan $\overrightarrow{u}(x, y)$.
3. Si $n = 3$ alors la norme euclidienne de (x, y, z) correspond à la norme du vecteur de l'espace $\overrightarrow{u}(x, y, z)$.
4. Par définition, pour tout vecteur u de $\mathbb{R}^n$, $\|u\|^2 = u \cdot u$.

Propriété 10

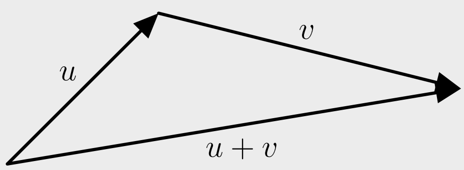
Pour tout vecteur u de $\mathbb{R}^n$ et tout réel λ,

- $\|u\| = 0 \iff u = 0_{\mathbb{R}^n}$ (la norme est définie) ;
- $\|u\| \geqslant 0$ (la norme est positive) ;
- $\|\lambda u\| = |\lambda| \, \|u\|$ (la norme est homogène) ;

Propriété 11. — Inégalité triangulaire

Pour tous vecteurs u et v de $\mathbb{R}^n$,

$$\|u + v\| \leqslant \|u\| + \|v\| .$$



Propriété 12. — Identités remarquables

Pour tous vecteurs u et v de $\mathbb{R}^n$,

1. $\|u + v\|^2 = \|u\|^2 + 2u \cdot v + \|v\|^2$;
2. $\|u - v\|^2 = \|u\|^2 - 2u \cdot v + \|v\|^2$;
3. $(u - v) \cdot (u + v) = \|u\|^2 - \|v\|^2$.

Corollaire 13 : Identité de polarisation

Pour tous vecteurs u et v de $\mathbb{R}^n$,

1. $u \cdot v = \dfrac{1}{2}\left(\|u+v\|^2 - \|u\|^2 - \|v\|^2\right)$;

2. $u \cdot v = \dfrac{1}{4}\left(\|u+v\|^2 - \|u-v\|^2\right)$.

Définition 14

On dit qu'un vecteur $u \in \mathbb{R}^n$ est normé (ou unitaire) si $\|u\| = 1$.

Remarque 15. Si un vecteur non nul u n'est pas unitaire, on peut construire un vecteur u' unitaire et colinéaire à u en multipliant u par $\dfrac{1}{\|u\|}$.

Exemple 16. Déterminer des vecteurs normés u' et v' respectivement colinéaires aux vecteurs u et v de l'exemple 3.

Définition 17

Soit u et v deux vecteurs de $\mathbb{R}^n$. La distance entre u et v, notée $d(u,v)$, est définie par

$$d(u,v) = \|u-v\|\,.$$

Remarque 18. Par homogénéité de la norme, pour tous vecteurs u et v de $\mathbb{R}^n$,

$$d(u,v) = \|u-v\| = \|-(u-v)\| = \|v-u\| = d(v,u).$$

Exemple 19. Calculer la distance entre les vecteurs u et v de l'exemple 3.

II. — Orthogonalité

1) Vecteurs orthogonaux

Définition 20

On dit que deux vecteurs u et v de $\mathbb{R}^n$ sont orthogonaux si $u \cdot v = 0$.

Notation 21. Pour signifier que deux vecteurs sont orthogonaux, on note $u \perp v$.

Exemple 22. Étudier l'orthogonalité des vecteurs

$$u = (1,-1,-1,1), \qquad v = (2,3,-3,-2), \qquad \text{et} \qquad w = (1,-1,-3,4).$$

Remarque 23. Le vecteur nul est orthogonal à tout vecteur de $\mathbb{R}^n$.

Propriété 24. — Théorème de Pythagore

Soit u et v deux vecteurs de $\mathbb{R}^n$. Alors,

$$u \perp v \iff \|u+v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 .$$

Définition 25

On dit qu'une famille $\mathcal{F}$ de vecteurs est orthogonale si les vecteurs de $\mathcal{F}$ sont deux à deux orthogonaux.
Autrement dit, une famille $(u_1, u_2, ..., u_p)$ de vecteurs de $\mathbb{R}^n$ est orthogonale si et seulement si, pour tout $(i,j) \in [\![1,p]\!]^2$, si $i \neq j$ alors $u_i \perp u_j$.

Si, de plus, tous les vecteurs de $\mathcal{F}$ sont unitaires, on dit que $\mathcal{F}$ est une famille orthonormale (ou orthonormée).

Exemple 26. On considère dans $\mathbb{R}^4$ les vecteurs $u = (1,1,1,1)$, $v = (1,-1,1,-1)$ et $w = (1,0,-1,0)$. Montrer que (u,v,w) est une famille orthogonale de $\mathbb{R}^4$. Est-ce une famille orthonormée ?

Propriété 27

Toute famille orthogonale composée de vecteurs non nuls est une famille libre. En particulier, une famille orthonormée est libre.

Exemple 28. La famille (u,v,w) de l'exemple précédent est libre.

2) Bases orthonormales

Définition 29

On dit qu'une famille $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^n$ est une base orthogonale de $\mathbb{R}^n$ si $\mathcal{B}$ est à la fois une base et une famille orthogonale de $\mathbb{R}^n$.

Propriété 30

Une famille $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^n$ est une base orthogonale de $\mathbb{R}^n$ si et seulement si $\mathcal{B}$ est une famille orthogonale composée de n vecteurs non nuls.

Exemple 31. Dans $\mathbb{R}^3$, on considère les vecteurs $u = (1,-1,1)$, $v = (2,4,2)$ et $w = (1,0,-1)$. Montrer que $\mathcal{B} = (u,v,w)$ est une base orthogonale de $\mathbb{R}^3$.

Définition 32

On dit qu'une famille $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^n$ est une base orthonormale (ou orthonormée) de $\mathbb{R}^n$ si $\mathcal{B}$ est à la fois une base de $\mathbb{R}^n$ et une famille orthonormée de $\mathbb{R}^n$.

Exemple 33. En utilisant la famille $\mathcal{B}$ de l'exemple 31, construire une base orthonormée $\mathcal{B}'$ de $\mathbb{R}^3$.

Propriété 34

Si F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ alors F admet une base orthonormale i.e. une base qui est une famille orthonormale.

Exemple 35. Dans $\mathbb{R}^3$, déterminer une base orthonormée du plan engendré par les vecteurs $u = (1,0,1)$ et $v = (1,1,0)$.

Propriété 36

Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, ..., e_n)$ une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$ et $u \in \mathbb{R}^n$. Alors,

$$u = \sum_{i=1}^{n} (u \cdot e_i) e_i.$$

Autrement, les coordonnées de u dans la base $\mathcal{B}$ sont $(u \cdot e_1, u \cdot e_2, ..., u \cdot e_n)$.

Exemple 37. Déterminer les coordonnées du vecteur $u = (1,1,1)$ dans la base orthonormée $\mathcal{B}'$ de l'exemple 33

Propriété 38

Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, ..., e_n)$ une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$ et u et v deux vecteurs de $\mathbb{R}^n$. On suppose que les coordonnées de u et v dans $\mathcal{B}$ sont respectivement $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ et $(\alpha'_1, \alpha'_2, ..., \alpha'_n)$. Alors,

$$u \cdot v = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \alpha'_i \qquad \text{et} \qquad \|u\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2}.$$

Remarque 39. La propriété précédent assure que les expressions du produit scalaire et de la norme restent les mêmes dans toutes les bases orthonormées.

3) Changement de bases orthonormées

Propriété 40

Soit $\mathcal{B}$ une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$. On note P la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{R}^n$ à la base $\mathcal{B}$. Alors,

1. les colonnes de P sont les coordonnées de vecteurs unitaires et deux à deux orthogonaux ;
2. $P\,{}^tP = {}^tP P = I_n$;
3. $P^{-1} = {}^tP$.

Exemple 41. Écrire la matrice de passage P de la base canonique à la base $\mathcal{B}'$ de l'exemple 33 et vérifier que $P\,{}^tP = I_3$.

Théorème 42. — Retour sur le théorème spectral

Toute matrice symétrique réelle est diagonalisable dans une base orthonormale. Ainsi, si M est une matrice symétrique réelle, il existe une matrice inversible P et une matrice diagonale D telle que $M = PD\,{}^tP$.

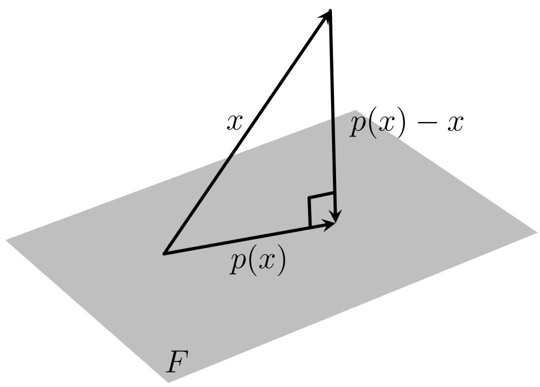
Exemple 43. Diagonaliser la matrice $M = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ dans une base orthonormée.

III. — Projection orthogonale sur un sous-espace

Définition 44

Soit F un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$. On appelle projection orthogonale sur F un endomorphisme p de $\mathbb{R}^n$ tel que :

- $\forall x \in \mathbb{R}^n,\ p(x) \in F$;
- $\forall x \in \mathbb{R}^n,\ \forall y \in F,\ p(x) - x \perp y$.



Propriété 45

Soit F un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$. On considère une base orthonormale $(f_1, f_2, ..., f_p)$ de F. Alors, il existe une unique projection orthogonale sur F : il s'agit de l'endomorphisme p de $\mathbb{R}^n$ défini par :

$$\forall x \in \mathbb{R}^n,\ p(x) = \sum_{i=1}^{p} (x \cdot f_i) f_i.$$

Exemple 46. On note F le plan considéré dans l'exemple 35. Déterminer la projection orthogonale sur F.

Définition 47

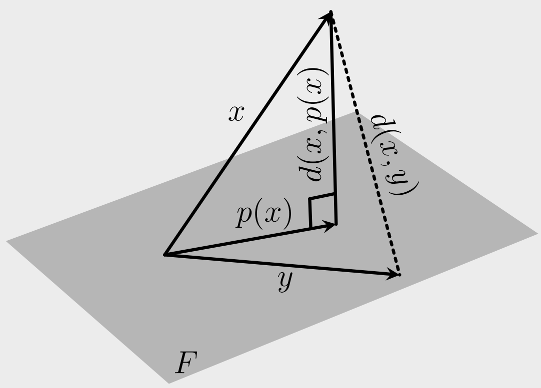
Soit F un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$. On note p la projection orthogonale sur F. Si $x \in \mathbb{R}^n$, le vecteur $p(x)$ s'appelle le projeté orthogonal de x sur F.

Exemple 48. On reprend la situation de l'exemple 46. Déterminer le projeté orthogonal de $x = (1, 1, 1)$ sur le plan F.

Remarque 49. Si $x \in F$ alors $p(x) = x$ i.e. x est son propre projeté orthogonal sur F.

Propriété 50

Soit F un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$, $x \in \mathbb{R}^n$ et $p(x)$ son projeté orthogonal sur F. Alors, pour tout vecteur $y \in F$, $d(x,y) \geqslant d(x,p(x))$.



Remarque 51. Autrement dit, le projeté orthogonal de x sur F est le vecteur de F le plus proche de x.

Définition 52

Soit F un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$, $x \in \mathbb{R}^n$ et $p(x)$ son projeté orthogonal sur F. Alors, $d(x,p(x))$ est appelée la distance de x à F et on la note $d(x,F)$. Ainsi

$$d(x,F) = \|x - p(x)\| .$$

Exemple 53. On reprend la situation de l'exemple 46. Déterminer la distance du vecteur $x = (1,1,1)$ au plan F.

IV. — Exercices

Exercice 1. Dans chaque cas, calculer $u \cdot v$.

1. Dans $\mathbb{R}^2$, u et v sont définis par $u = (\sqrt{3}, -3)$ et $v = (\sqrt{12}, 2)$.
2. Dans $\mathbb{R}^3$, u et v sont définis par $u = (\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4})$ et $v = (9, -10, 12)$.
3. Dans $\mathbb{R}^4$, u et v sont définis par $u = (a+1, a, a-1, 1-2a^2)$ et $v = (a, a-1, a+1, 1)$ où $a \in \mathbb{R}$.

Exercice 2. En reprenant les données de l'exercice 1, calculer, dans chaque cas, $\|u\|$ et $\|v\|$.

Exercice 3. On considère deux vecteurs u et v dans $\mathbb{R}^n$.

1. On suppose que $\|u\| = 6$, $\|v\| = 4$ et $\|u+v\| = 8$. Déterminer $u \cdot v$.
2. On suppose que $\|u+v\| = 8$ et $\|u-v\| = 6$. Déterminer $u \cdot v$.

Exercice 4. Parmi les vecteurs suivants de $\mathbb{R}^4$, déterminer les couples de vecteurs orthogonaux.

$$u = (1,0,1,0) \qquad v = (1,1,-1,1) \qquad w = (1,1,1,1) \qquad z = (0,-1,0,-1).$$

Exercice 5. Dans $\mathbb{R}^3$, on considère les vecteurs $u = (1,1,2)$, $v = (1,1,-1)$ et $w = (-1,1,0)$. On note $\mathcal{F} = (u,v,w)$.

1. Montrer que $\mathcal{F}$ est une famille orthogonale mais pas orthonormale.
2. Déterminer une famille $\mathcal{F}' = (u',v',w')$ orthonormale telle que u', v' et w' soient respectivement colinéaires à u, v et w.

Exercice 6. Dans $\mathbb{R}^3$, on considère les trois vecteurs

$$u = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, -1), \qquad v = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, 1) \qquad \text{et} \qquad w = \frac{1}{\sqrt{6}}(1, -2, -1).$$

1. Montrer que $\mathcal{B} = (u, v, w)$ est une base orthonormale de $\mathbb{R}^3$.

2. Déterminer les coordonnées des vecteurs $x = (1, 1, 1)$ et $y = (0, 1, 2)$ dans $\mathcal{B}$.

3. Calculer $x \cdot y$, $\|x\|$ et $\|y\|$ en utilisant les coordonnées de x et y dans la base canonique puis en utilisant leurs coordonnées dans la base $\mathcal{B}$.

Exercice 7. Soit u et v deux vecteurs de $\mathbb{R}^n$. Montrer que $\|u\| = \|v\|$ si et seulement si $u - v$ et $u + v$ sont orthogonaux.

Exercice 8. On note $P = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2y + 3z = 0\}$ et D la droite engendrée par le vecteur $n = (1, 2, 3)$.

On dit qu'un vecteur $x \in \mathbb{R}^3$ est orthogonal à P si x est orthogonal à tout vecteur de P.

1. Justifier que P est un plan vectoriel et en déterminer une base (e_1, e_2).

2. Montrer que n est orthogonal à P.

3. Montrer que tout vecteur $u \in D$ est orthogonal à P.

4. Réciproquement, soit $u \in \mathbb{R}^3$ un vecteur orthogonal à P. On souhaite montrer que $u \in D$.

- **a.** Vérifier que $\mathcal{B} = (e_1, e_2, n)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
- **b.** On écrit $u = \alpha e_1 + \beta e_2 + \gamma n$. Calculer $u \cdot e_1$ et $u \cdot e_2$ en fonction de α et β.
- **c.** En déduire les valeurs de α et β puis conclure.

Exercice 9. On considère la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

et on note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à M. On considère les vecteurs $e_1 = (1, 1, -2)$, $e_2 = (1, -1, 0)$ et $e_3 = (1, 1, 1)$ de $\mathbb{R}^3$.

1. **a.** Sans calcul, justifier que M est diagonalisable.

- **b.** Montrer que e_1, e_2 et e_3 sont des vecteurs propres de f deux à deux orthogonaux.
- **c.** Justifier que $\mathcal{B}_1 = (e_1, e_2, e_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

  On note P la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{R}^3$ à la base $\mathcal{B}_1$ et D la matrice représentative de f dans la base $\mathcal{B}_1$.
- **d.** Déterminer les matrices P et D et donner une relation entre M, P et D.

2. **a.** En utilisant la base $\mathcal{B}_1$, construire une base orthonormale $\mathcal{B}_2$ constituée de vecteurs propres de f.

  On note Q la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{R}^3$ à la base $\mathcal{B}_2$.
- **b.** Que vaut ${}^tQQ$?
- **c.** Que vaut ${}^tQMQ$?

Exercice 10. On considère la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

et on note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à A.

1. Justifier que f est diagonalisable.

2. Démontrer que 3 est une valeur propre de f et déterminer une base orthonormée du sous-espace propre $E_3(f)$.

3. On considère les vecteurs $u = (-1, 0, 1)$ et $v = (2, 1, 0)$.

- **a.** Vérifier que u et v sont des vecteurs propres de f.
- **b.** Déterminer la dimension du sous-espace propre auquel u et v appartiennent.
- **c.** Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et $v' = v + \alpha u$. Déterminer la valeur de α pour laquelle v' et u sont orthogonaux.
- **d.** En déduire une base orthonormée de $E_{-3}(f)$.

4. Vérifier qu'en concaténant les bases obtenues pour $E_3(f)$ et $E_{-3}(f)$, on obtient une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$.

5. Quelle est la matrice de f dans cette base ?

6. Déduire des questions précédentes une matrice P inversible et une matrice D diagonale telles que :

$$^tPAP = D \qquad \text{et} \qquad {}^tPP = I_3.$$

Exercice 11. Dans $\mathbb{R}^3$, on définit les vecteurs $u = (1, 1, 1)$, $v = (2, -1, 0)$ et $w = (-5, 4, 1)$. De plus, on note F le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ engendré par u et v.

1. Justifier que F est un plan vectoriel.

2. **a.** Montrer que $w \in F$.

- **b.** Montrer que (u, w) est une base orthogonale de F.
- **c.** En déduire une base orthonormale de F.

3. On note p la projection orthogonale sur F et on considère le vecteur $t = (2, 7, -4)$.

- **a.** Calculer $p(t)$.
- **b.** Déterminer la distance de t à F.

Exercice 12. On considère $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + 2y = 0\}$, $v = \left(\frac{-2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right)$ et $w = (3, 1)$.

1. **a.** Montrer que D est une droite vectorielle de $\mathbb{R}^2$.

- **b.** Justifier que (v) est une base orthonormale de D.

2. Dans la suite, on note p la projection orthogonale sur D.

- **a.** Déterminer $p(w)$.
- **b.** Calculer la distance de w à D.
- **c.** Représenter géométriquement D, v, w et $p(w)$.

3. **a.** Déterminer la matrice M de p dans la base canonique.

- **b.** En utilisant M, retrouver la valeur de $p(w)$.
- **c.** Calculer M^2 et interpréter le résultat obtenu.

Exercice 13. On considère $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0\}$.

1. a. Montrer que F est un plan vectoriel de $\mathbb{R}^3$ et en déterminer une base (u, v).

b. Déterminer une valeur de $\alpha \in \mathbb{R}$ pour laquelle $v - \alpha u$ est orthogonal à u.

c. En déduire une base orthonormée (e_1, e_2) de F.

Dans la suite, on note p la projection orthogonale sur F.

2. Déterminer la distance du vecteur $w = (1, 2, 3)$ au plan F.

3. a. Déterminer un vecteur unitaire e_3 orthogonal à F.

b. Vérifier que $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ est une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$.

c. Déterminer la matrice de p dans la base $\mathcal{B}$.

4. a. Soit P la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{R}^3$ à $\mathcal{B}$. Calculer P et P^{-1}.

b. En déduire la matrice de p dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

5. a. Vérifier que $p \circ p = p$.

b. Interpréter géométriquement l'égalité précédente.

Exercice 14. On note p l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est

$$A = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 5 & -2 & 1 \\ -2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Le but de l'exercice est de démontrer que p est une projection orthogonale.

Pour cela, on note $E_0 = \ker(p)$ et $E_1 = \ker(p - \mathrm{Id})$.

1. Justifier que E_0 est une droite vectorielle dont on donnera une base (u).

2. Montrer que E_1 est un plan vectoriel dont on donnera une base (v, w).

3. a. Montrer que, pour tout $t \in \mathbb{R}^3$, $p(t) \in E_1$ et que $t - p(t) \in E_0$.

b. En déduire que, pour tout $t \in \mathbb{R}^3$, $p(t) - t$ est orthogonal à tout vecteur de E_1.

c. Justifier que p est la projection orthogonale sur un sous-espace de $\mathbb{R}^3$ que l'on précisera.

4. a. Montrer que $\mathcal{B} = (u, v, w)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

b. Donner la matrice D de p dans la base $\mathcal{B}$.

c. Sans calcul, déterminer M^2.

Exercice 15. Soit u et v deux vecteurs de $\mathbb{R}^n$. Le but de l'exercice est de démontrer l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$(u \cdot v)^2 \leqslant \|u\|^2 \|v\|^2 .$$

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $P(x) = \|xu + v\|^2$.

a. Démontrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $P(x) = x^2 \|u\|^2 + 2x(u \cdot v) + \|v\|^2$.

b. On suppose que $u \neq 0$. À quelle famille de fonctions appartient la fonction est P ?

c. Justifier que $P(x) \geqslant 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

d. Calculer le discriminant de P et en déduire l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

e. L'inégalité reste-t-elle vraie si $u = 0$?

2. Première application. On considère des réels x_1, x_2, ..., x_n. Que donne l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour $u = (x_1, x_2, ..., x_n)$ et $v = (1, 1, ..., 1)$?

3. Deuxième application. Démontrer que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k\sqrt{k} \leqslant \frac{n(n+1)\sqrt{2n+1}}{2\sqrt{3}}$.

4. Troisième application. On considère des réels strictement positifs x_1, x_2, ..., x_n. Démontrer que $\displaystyle\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x_k}\right) \geqslant n^2$.