# ♦ Chapitre 14. Couples de variables aléatoires discrètes

Dans tout le chapitre, on se place sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ et toutes les variables aléatoires considérées sont définies sur cet espace.

## I. — Définitions

### 1) Variables aléatoires discrètes (Rappels)

**Définition 1**

Une variable aléatoire **discrète** est une variable $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ dont l'univers image est soit un ensemble fini soit un ensemble infini qu'on peut écrire sous la forme d'une suite $(x_n)$.

**Exemple 2.**

1. Si on lance deux dés cubiques, la variable aléatoire $X$ égale à la somme des deux nombres obtenus est une variable discrète car $X(\Omega) = [\![2, 12]\!]$ est un ensemble fini.
2. Si une variable aléatoire $Y$ suit une loi géométrique alors $Y$ est une variable aléatoire discrète car $Y(\Omega) = \mathbb{N}^* = (n)_{n\geqslant 1}$.
3. Si une variable aléatoire $Z$ suit une loi de Poisson alors $Z$ est une variable aléatoire discrète car $Z(\Omega) = \mathbb{N} = (n)_{n\geqslant 0}$.
4. Si une variable aléatoire $T$ suit une loi exponentielle alors $T$ n'est pas une variable aléatoire discrète car $T(\Omega) = [0\,; +\infty[$ qui est un ensemble infini qui ne peut pas être écrit sous la forme d'une suite.

**Propriété 3**

Soit $X$ une variable aléatoire discrète. Alors, la famille $(\{X = a\})_{a\in X(\Omega)}$ est un système complet d'évènements.

**Corollaire 4**

Si $X$ est une variable aléatoire discrète alors $\displaystyle\sum_{a\in X(\Omega)} \mathbf{P}(X = a) = 1$.

*Remarque* 5. Soit $X$ une variable aléatoire discrète. Si $X(\Omega) = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ est un ensemble fini alors $\displaystyle\sum_{a\in X(\Omega)} \mathbf{P}(X = a) = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{P}(X = x_k)$ est une somme finie. En revanche, si $X(\Omega) = (x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est un ensemble infini alors $\displaystyle\sum_{a\in X(\Omega)} \mathbf{P}(X = a) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbf{P}(X = x_k)$ est la somme d'une série.

## 2) Loi conjointe

**Définition 6**

Soit $X$ et $Y$ deux variables aléatoires discrètes. La **loi conjointe** du couple $(X, Y)$ est la donnée de

1. des univers images $X(\Omega)$ et $Y(\Omega)$ ;
2. des probabilités $P(\{X = i\} \cap \{Y = j\})$ pour tout $(i, j) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)$.

*Remarque* 7.

1. Lorsque $X(\Omega)$ et $Y(\Omega)$ sont des ensembles de petits cardinaux, on présente en général la loi conjointe de $(X, Y)$ sous la forme d'un tableau à double entrée.
2. Dans la pratique, on note souvent $(X = i, Y = j)$ l'évènement $\{X = i\} \cap \{Y = j\}$.

**Exemple 8.** Une urne contient 3 boules numérotées 1, 2 et 3. On tire successivement et avec remise 2 boules de l'urne et on note $X$ le plus petit numéro obtenu et $Y$ le plus grand numéro obtenu.

Déterminer la loi conjointe du couple $(X, Y)$.

**Propriété 9**

Soit $(X, Y)$ un couple de variables aléatoires discrètes.
La famille $((X = i, Y = j))_{(i,j)\in X(\Omega)\times Y(\Omega)}$ est un système complet d'évènements et, en particulier,

$$\sum_{i\in X(\Omega)} \left( \sum_{j\in Y(\Omega)} \mathbf{P}(X = i, Y = j) \right) = \sum_{j\in Y(\Omega)} \left( \sum_{i\in X(\Omega)} \mathbf{P}(X = i, Y = j) \right) = 1.$$

*Remarque* 10.

1. Selon que les variables sont à support fini ou infini, les sommes précédentes représentent des sommes finies ou des sommes de séries.
2. Dans le cas d'univers images finis, l'égalité précédente signifie que si on représente la loi conjointe d'un couple par un tableau alors la somme de toutes les probabilités du tableau est égale à 1.

# II. — Lois marginales et lois conditionnelles

## 1) Lois marginales

**Définition 11**

Soit $X$ et $Y$ deux variables aléatoires discrètes. Les lois de $X$ et de $Y$ sont appelées les **lois marginales** du couple $(X, Y)$.

**Propriété 12**

Soit $X$ et $Y$ deux variables aléatoires discrètes. On suppose que l'on connaît la loi conjointe du couple $(X, Y)$. Alors,

**1.** la loi de $X$ est donnée par

$$\forall i \in X(\Omega), \quad \mathbf{P}(X = i) = \sum_{j \in Y(\Omega)} P(X = i, Y = j)$$

**2.** la loi de $Y$ est donnée par

$$\forall j \in Y(\Omega), \quad \mathbf{P}(Y = j) = \sum_{i \in X(\Omega)} P(X = i, Y = j)$$

*Remarque* 13. Dans le cas d'univers image finis, si on représente la loi du couple $(X, Y)$ par un tableau, on peut faire apparaître les lois de $X$ et de $Y$ en ajoutant des marges au tableau et sommant en ligne et en colonne.

**Exemple 14.**

**1.** En reprenant la situation de l'exemple 8, déterminer les lois marginales du couple $(X, Y)$.

**2.** On considère deux variables $X$ et $Y$ telles que $X(\Omega) = \{1, 2, 3\}$, $Y(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et, pour tout $(i, j) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)$, $\mathbf{P}(X = i, Y = j) = \dfrac{2}{3^{j+1}}$.
Déterminer les lois marginales de $(X, Y)$. On reconnaîtra des lois usuelles.

*Remarque* 15. La propriété précédente assure que si on connaît la loi conjointe du couple $(X, Y)$ alors on peut déterminer les lois marginales. La réciproque est fausse : à partir des lois marginales, il n'est en général pas possible de retrouver la loi conjointe du couple.

**Exemple 16.** On lance deux fois successivement une pièce de monnaie bien équilibrée. On note

- $X$ la variable aléatoire égale à 1 si on obtient « pile » au premier lancer et 0 sinon ;
- $Y$ la variable aléatoire égale à 1 si on obtient « face » au premier lancer et 0 sinon ;
- $Z$ la variable aléatoire égale à 1 si on obtient « pile » au second lancer et 0 sinon ;

Montrer que les lois conjointes des couples $(X, Y)$ et $(X, Z)$ sont différentes bien que $Y$ et $Z$ aient la même loi.

## 2) Lois conditionnelles

**Définition 17**

Soit $X$ et $Y$ deux variables aléatoires discrètes.

**1.** Soit $j \in Y(\Omega)$ tel que $\mathbf{P}(Y = j) \neq 0$. La **loi conditionnelle de $X$ sachant $\{Y = j\}$** est la donnée, pour tout $i \in X(\Omega)$, de $\mathbf{P}(X = i \mid Y = j)$ i.e. de $\dfrac{\mathbf{P}(X = i, Y = j)}{\mathbf{P}(Y = j)}$.

**2.** Soit $i \in X(\Omega)$ tel que $\mathbf{P}(X = i) \neq 0$. La **loi conditionnelle de $Y$ sachant $\{X = i\}$** est la donnée, pour tout $j \in Y(\Omega)$, de $\mathbf{P}(Y = j \mid X = i)$ i.e. de $\dfrac{\mathbf{P}(X = i, Y = j)}{\mathbf{P}(X = i)}$.

*Remarque* 18. Si la connaissance des lois marginales ne permet pas en général de déterminer la loi conjointe du couple, la connaissance de la loi de $X$ et des lois conditionnelles de $Y$ sachant $\{X = i\}$ pour tout $i \in X(\Omega)$ le permet puisque, comme $(\{X = i\})_{i \in X(\Omega)}$ est un système complet d'évènements, d'après la formule des probabilités totales

$$\forall j \in Y(\Omega) \quad \mathbf{P}(Y = j) = \sum_{i \in X(\Omega)} \mathbf{P}(X = i)\mathbf{P}(Y = j \mid X = i).$$

**Exemple 19.** On dispose de 3 dés bien équilibrés : le dé numéro 1 est un dé tétraédrique dont les 4 faces sont numérotées de 1 à 4 et les dés numéros 2 et 3 sont deux dés cubiques dont les 6 faces sont numérotées de 1 à 6. On choisit au hasard un dé puis on le lance. On note $X$ la variable aléatoire égale au numéro du dé choisi et $Y$ la variable aléatoire égale au nombre obtenu en lançant le dé.

**1.** Reconnaître la loi de $X$.

**2.** Déterminer les lois conditionnelles de $Y$ sachant $\{X = 1\}$, sachant $\{X = 2\}$ puis sachant $\{X = 3\}$.

**3.** Déterminer la loi conjointe du couple $(X, Y)$.

**4.** En déduire la loi de $Y$.

## 3) Cas où les variables sont indépendantes

**Définition 20 : Rappel**

On dit que deux variables $X$ et $Y$ sont **indépendantes** si

$$\forall (i, j) \in X(\Omega) \times Y(\Omega) \quad \mathbf{P}(X = i, Y = j) = \mathbf{P}(X = i)\mathbf{P}(Y = j).$$

*Remarque* 21.

**1.** Dans le cas particulier où les variables aléatoires $X$ et $Y$ sont indépendantes, il est possible de déterminer la loi conjointe de $(X, Y)$ à partir des lois marginales.

**2.** Si $X$ et $Y$ sont deux variables aléatoires indépendantes dont les univers images sont finis et si on représente la loi du couple par un tableau alors chaque valeur du tableau est le produit des cases marginales correspondantes.

**Exemple 22.**

**1.** On reprend la situation de l'exemple 16. Les variables $X$ et $Y$ sont elles-indépendantes ? Même question avec $X$ et $Z$.

**2.** Soit $X$ et $Y$ deux variables aléatoires indépendantes suivant des lois géométriques de même paramètre $p$. Déterminer la loi conjointe de $(X, Y)$.

**3.** Soit $X$ et $Y$ deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$ telles que la loi conjointe du couple $(X, Y)$ est donnée par

$$\forall (i, j) \in \mathbb{N}^2 \quad \mathbf{P}(X = i, Y = j) = \frac{\mathrm{e}^{-2}}{i!j!}.$$

**a.** Déterminer les lois marginales. On reconnaîtra des lois usuelles.

**b.** Les variables $X$ et $Y$ sont-elles indépendantes ?

# III. — Covariance et corrélation

## 1) Définition

**Définition 23**

Soit $X$ et $Y$ des variables aléatoires discrètes admettant des espérances. Si la variable $(X - \mathbf{E}(X))(Y - \mathbf{E}(Y))$ admet une espérance, on définit la **covariance** de $X$ et $Y$ (ou du couple $(X, Y)$), notée $\mathbf{Cov}(X, Y)$, par

$$\mathbf{Cov}(X, Y) = \mathbf{E}((X - \mathbf{E}(X))(Y - \mathbf{E}(Y))).$$

*Remarque* 24.

**1.** Si $X = Y$ alors on retrouve la variance : $\mathbf{Cov}(X, X) = \mathbf{E}((X - \mathbf{E}(X))^2) = \mathbf{V}(X)$.

**2.** La covariance est symétrique : $\mathbf{Cov}(X, Y) = \mathbf{Cov}(Y, X)$.

**Exemple 25.** On reprend les variables $X$, $Y$ et $Z$ de l'exemple 16.
Calculer la covariance de $X$ et $Y$ et celle de $X$ et $Z$.

**Théorème 26. — Formule de König-Huygens**

Soit $X$ et $Y$ des variables aléatoires discrètes admettant des espérances. Alors, $X$ et $Y$ admettent une covariance si et seulement si $XY$ admet une variance et, dans ce cas,

$$\mathbf{Cov}(X, Y) = \mathbf{E}(XY) - \mathbf{E}(X)\mathbf{E}(Y).$$

*Remarque* 27. Dans la pratique, pour calculer l'espérance de $XY$, on utilisera le théorème de transfert pour le produit :

$$\mathbf{E}(XY) = \sum_{i \in X(\Omega)} \sum_{j \in Y(\Omega)} ij\mathbf{P}(X = i, Y = j).$$

**Exemple 28.** On reprend les variables $X$ et $Y$ de l'exemple 19. Calculer $\mathbf{Cov}(X, Y)$.

**Propriété 29**

Soit $X$ et $Y$ deux variables aléatoires discrètes admettant des variances. Alors, $X$ et $Y$ admette une covariance, $X + Y$ admet une variance et

$$\mathbf{V}(X + Y) = \mathbf{V}(X) + \mathbf{V}(Y) + 2\mathbf{Cov}(X, Y).$$

**Exemple 30.** On reprend les variables $X$, $Y$ et $Z$ de l'exemple 16.
Calculer la variance de $X + Y$ et celle de $X + Z$.

## 2) Cas des variables indépendantes

**Propriété 31. — Rappel**

Si $X$ et $Y$ sont deux variables aléatoires indépendantes admettant des espérances alors $XY$ admet une espérance et $\mathbf{E}(XY) = \mathbf{E}(X)\mathbf{E}(Y)$.

**Corollaire 32**

Soit $X$ et $Y$ deux variables aléatoires discrètes <u>indépendantes</u> admettant des espérances.

1. $X$ et $Y$ admettent une covariance et $\mathbf{Cov}(X, Y) = 0$ ;
2. Si, de plus, $X$ et $Y$ admettent des variances alors $X + Y$ admet une variance et $\mathbf{V}(X + Y) = \mathbf{V}(X) + \mathbf{V}(Y)$.

**Définition 33**

On dit que deux variables discrètes $X$ et $Y$ sont **non corrélées** si $\mathbf{Cov}(X, Y) = 0$.

**Propriété 34**

Soit $X$ et $Y$ deux variables aléatoires discrètes indépendantes. Alors, $X$ et $Y$ sont non corrélées.

*Remarque* 35. La réciproque de la proposition précédente est fausse, comme le montre l'exemple suivant.

**Exemple 36.** On considère une variable aléatoire $X$ suivant une loi uniforme sur $\{-1\,;0\,;1\}$ et une variable aléatoire $Y$ suivant la loi de Bernoulli ayant comme succès l'évènement $\{X = 0\}$.

1. Expliciter les lois de $X$ et de $Y$.
2. Montrer que $X$ et $Y$ ne sont pas indépendantes.
3. Montrer que $X$ et $Y$ ne sont pas corrélées.

# IV. — Exercices

**Exercice 1.** Une urne contient 4 boules numérotées de 1 à 4. On y effectue deux tirages successifs avec remise et on note $X$ (resp. $Y$) le numéro de la première (resp. de la seconde) boule tirée. On note également $M = \max(X, Y)$ le plus grand des deux numéros.

1. Quelles sont les lois de $X$ et $Y$ ?
2. Déterminer la loi du couple $(X, M)$. On présentera le résultats dans un tableau.
3. En déduire la loi de $M$.

**Exercice 2.** Une urne contient quatre boules indiscernables au toucher numérotées de 1 à 4. On tire simultanément au hasard deux boules de cette urne. On considère les deux variables aléatoires $X$ et $Y$ qui, à chaque tirage, font correspondre respectivement le plus petit et le plus grand des deux numéros obtenus.

1. Déterminer la loi du couple $(X, Y)$. On présentera les résultats dans un tableau.
2. En déduire les lois de probabilité de $X$ et de $Y$.

**Exercice 3.** On considère $n$ boîtes numérotées de 1 à $n$. La boîte $k$ contient $k$ boules numérotées de 1 à $k$. On choisit au hasard une boîte, puis une boule dans cette boîte. On note $X$ le numéro de la boîte et $Y$ le numéro de la boule.

1. Déterminer la loi du couple $(X, Y)$.
2. Calculer $\mathbf{P}(X = Y)$. On exprimera le résultat à l'aide d'une somme.

**Exercice 4.** Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $p \in ]0\,;1[$ et $q \in ]0\,;1[$. On considère une variable aléatoire $X$ suivant une loi $\mathscr{B}(n,p)$ et une variable aléatoire $Y$ à valeurs dans $[\![0,n]\!]$ telle que, pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, la loi conditionnelle de $Y$ sachant $\{X=k\}$ est la loi binomiale $\mathscr{B}(k,q)$.

Déterminer la loi de $Y$.

**Exercice 5.** Soit $m$ et $n$ deux entiers strictement positifs et $p \in ]0\,;1[$. On considère deux variables aléatoires indépendantes $X \hookrightarrow \mathscr{B}(n,p)$ et $Y \hookrightarrow \mathscr{B}(m,p)$. Déterminer, pour tout $k \in [\![0,n+m]\!]$, la loi conditionnelle de $X$ sachant $\{X+Y=k\}$

**Exercice 6.** On répète un lancer de pièce donnant « face » avec la probabilité $p \in ]0\,;1[$ de manière indépendante. On note $X$ le rang d'apparition du premier « face » obtenu et $Y$ le rang du deuxième « face ».

**1.** Déterminer $X(\Omega)$ et $Y(\Omega)$.

**2.** Quelle est la loi de $X$ ?

**3.** Calculer $\mathbf{P}(\{X=i\} \cap \{Y=j\})$ pour tout $i$ et pour tout $j$ vérifiant $i \geqslant j$.

**4.** Montrer que $X$ et $Y$ ne sont pas indépendantes.

**5.** Pour tout $j > i$ entiers naturels non nuls, déterminer $\mathbf{P}(X=i, Y=j)$.

**6.** En déduire la loi de $Y$.

**7.** Montrer l'existence et calculer l'espérance de $Y$.

**Exercice 7.** Soit $X$ et $Y$ deux variables aléatoires indépendantes qui suivent des lois de Poisson : $X \hookrightarrow \mathscr{P}(\lambda)$ et $Y \hookrightarrow \mathscr{P}(\mu)$ où $\lambda$ et $\mu$ sont deux réels positifs. On pose $S = X + Y$.

**1.** Calculer $\mathbf{E}(S)$.

**2. a.** Soit $(i,k) \in \mathbb{N}^2$. Déterminer $\mathbf{P}_{(X=i)}(S=k)$ (on distinguera les cas $i \leqslant k$ et $i > k$).

**b.** En déduire la loi de $S$.

**3.** Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer la loi conditionnelle de $X$ sachant $\{S=n\}$.

**Exercice 8.** Soit $X$ et $Y$ deux variables aléatoires définies sur un même espace probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ et à valeurs dans $\mathbb{N}$. On suppose que la loi du couple $(X,Y)$ est donnée par :

$$\forall\,(i\,;j) \in \mathbb{N}^2, \quad \mathbf{P}(X=i, Y=j) = \frac{1}{e2^{i+1}j!}.$$

**1.** Déterminer les lois de $X$ et de $Y$.

**2. a.** Prouver que $1+X$ suit une loi géométrique et en déduire $\mathbf{E}(X)$ et $\mathbf{V}(X)$.

**b.** Déterminer l'espérance et la variance de $Y$.

**3.** Les variables $X$ et $Y$ sont-elles indépendantes ?

**4.** Calculer $\mathbf{P}(X=Y)$.

**Exercice 9.** On lance un dé à six faces bien équilibré. On note $X$ le résultat obtenu. Ensuite, on choisit au hasard un nombre entre 1 et $X$ que l'on appelle $Y$.

**1.** Déterminer la loi conjointe du couple $(X,Y)$.

**2.** Donner la loi de $Y$.

**3.** Calculer $\mathbf{P}(X=Y)$.

**4.** Donner la loi de $X$ sachant $\{Y=2\}$.

**5.** $X$ et $Y$ sont-elles indépendantes ?

**Exercice 10.** On considère deux variables aléatoires $X$ et $Y$ dont la loi conjointe est donnée par le tableau ci-contre.

**1.** Calculer $\mathbf{Cov}(X, Y)$.

**2.** Les variables aléatoires $X$ et $Y$ sont-elles indépendantes.

**3.** Déterminer la loi conjointe de deux variables aléatoires indépendantes $(U, V)$ ayant les mêmes lois marginales que $(X, Y)$.

| $Y$ \ $X$ | $-1$ | $2$ |
|---|---|---|
| $-2$ | 0,1 | 0,5 |
| 1 | 0,3 | 0,1 |

**Exercice 11.** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère 2 urnes contenant chacune $n$ boules numérotées de 1 à $n$. On tire une boule dans chaque urne. Les variables aléatoires $X$ et $Y$ représentent les 2 numéros tirés.

**1.** Quelles sont les lois de $X$ et $Y$ ?

**2.** Déterminer $\mathbf{Cov}(X, Y)$.

**3.** Déterminer $\mathbf{V}(X + Y)$.

**Exercice 12.** On considère deux pièces qui ont une probabilité $\dfrac{1}{3}$ de tomber sur « pile » à chaque lancer. On lance d'abord la première pièce jusqu'à obtenir « pile » et on note $X$ le nombre de lancers effectués. On fait ensuite de même avec la deuxième pièce et on note Y le nombre de lancers effectués lors de cette deuxième étape.

**1.** Quelles sont les lois de $X$ et $Y$ ?

**2.** En moyenne, combien de lancer effectue-t-on en tout ?

**3.** On pose $W = \min(X, Y)$.

  **a.** Pour tout $k \in \mathbb{N}$, exprimer l'événement $\{W > k\}$ à l'aide de $X$ et $Y$.

  **b.** En déduire $\mathbf{P}(W > k)$, puis montrer que $W$ suit une loi géométrique dont on précisera le paramètre.

**4.** On pose $Z = \max(X, Y)$.

  **a.** À quoi est égal $W + Z$ ? En déduire $\mathbf{E}(Z)$.

  **b.** Exprimer $WZ$ en fonction de $X$ et $Y$, et en déduire $\mathbf{Cov}(W, Z)$.

  **c.** À l'aide des questions précédentes, déterminer la variance de $Z$.

**Exercice 13.** Soit $n$ un entier naturel supérieur ou égal à 2. On considère une urne contenant une boule numérotée 1, deux boules numérotées 2, ..., $n$ boules numérotées $n$.

**1.** On tire une boule de cette urne et on note $X$ le numéro obtenu.
Déterminer la loi de $X$ et calculer son espérance.

**2.** On effectue dans cette urne deux tirages successifs sans remise. On note $T_1$ le numéro de la première boule obtenue et $T_2$ le numéro de la deuxième boule obtenue.

  **a.** Déterminer la loi du couple $(T_1, T_2)$.

  **b.** En déduire la loi des variables $T_1$ et $T_2$.

  **c.** Les variables $T_1$ et $T_2$ sont-elles indépendantes ?

  **d.** Déterminer $\mathbf{E}(T_1 + T_2)$.

**Exercice 14.** Soit $X$ et $Y$ deux variables aléatoires suivant des lois de Bernoulli.
Montrer que $\mathbf{Cov}(X, Y) = 0$ si et seulement si $X$ et $Y$ sont indépendantes.