♦ Chapitre 13. Fonctions de deux variables

I. — Fonctions réelles de deux variables réelles

1) Définition

Définition 1

Une **fonction réelle f de deux variables réelles** est une fonction $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$.

Exemple 2. On considère la fonction réelle de deux variables réelles :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & x^2y - y^2 + xy - 1 \end{array}$$

1. Calculer $f(0,0)$, $f(1,0)$ et $f(0,1)$.

2. Calculer, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x,0)$, $f(0,x)$, $f(x,x)$.

Remarque 3. Soit un entier $n \geqslant 3$. On pourrait, de manière plus générale, définir une fonction réelle de n variables réelles comme une fonction de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$. Par exemple,

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y,z) & \longmapsto & x^2 + y^2 + z^2 - xyz \end{array}$$

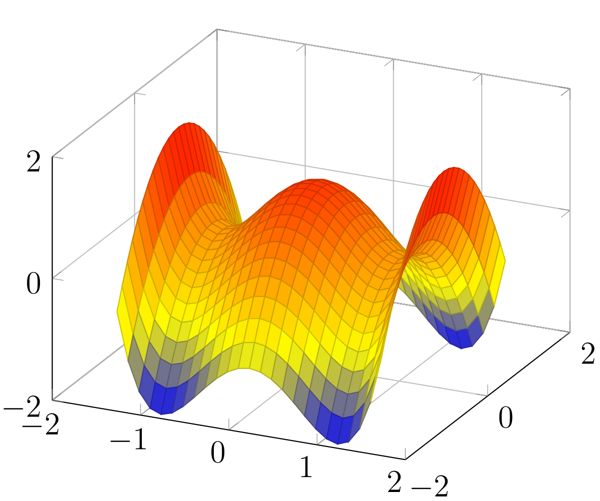
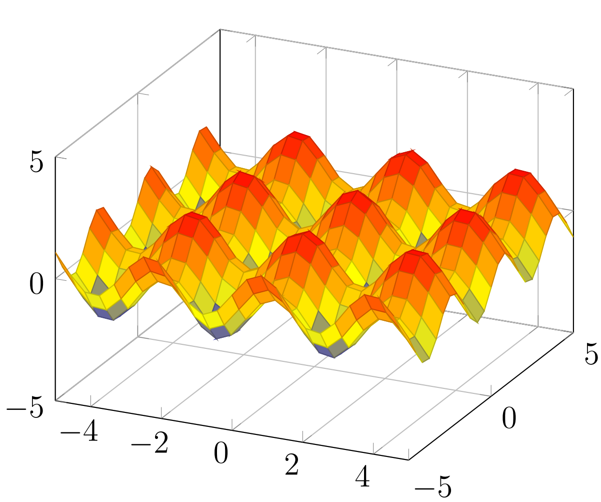
est une fonction réelle de trois variables réelles.

2) Représentation graphique

Une fonction réelle f d'une variable réelle peut se représenter dans le plan muni d'un repère par la courbe $\mathscr{C}_f$ d'équation $y = f(x)$ c'est-à-dire l'ensemble des points du plan de coordonnées $(x, f(x))$ pour $x \in \mathbb{R}$.

De la même façon, une fonction réelle de deux variables réelles peut se représenter dans l'espace muni d'un repère par la surface $\mathcal{S}_f$ d'équation $z = f(x,y)$ c'est-à-dire l'ensemble des points de l'espace de coordonnées $(x, y, f(x,y))$ pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

Exemple 4.

$g : (x,y) \longmapsto x^4 - 2x^2 - y^2 + 1$	$h : (x,y) \longmapsto \sin(x) + \sin(y)$
	

II. — Dérivées partielles

1) Fonctions partielles

Définition 5

Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction réelle de deux variables et $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. On définit les fonctions partielles (ou les applications partielles) de f en (a, b) par :

- la fonction $f(\cdot, b) : x \longmapsto f(x, b)$ qui est la **fonction partielle de f en (a, b) par rapport à la première variable** ;
- la fonction $f(a, \cdot) : y \longmapsto f(a, y)$ qui est la **fonction partielle de f en (a, b) par rapport à la seconde variable**.

Remarque 6. Les fonctions partielles sont des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ c'est-à-dire des fonctions réelles d'une seule variable.

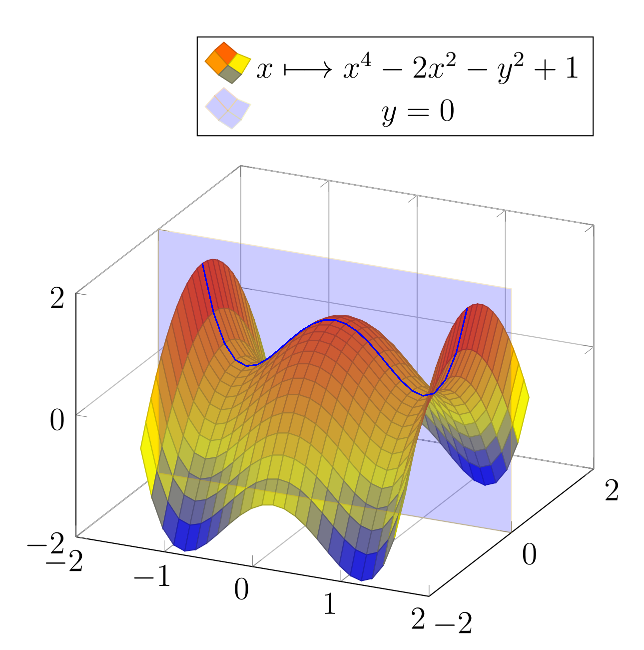
Exemple 7. En reprenant la fonction g de l'exemple 4, déterminer les fonctions partielles de f en $(0, 0)$.

Propriété 8

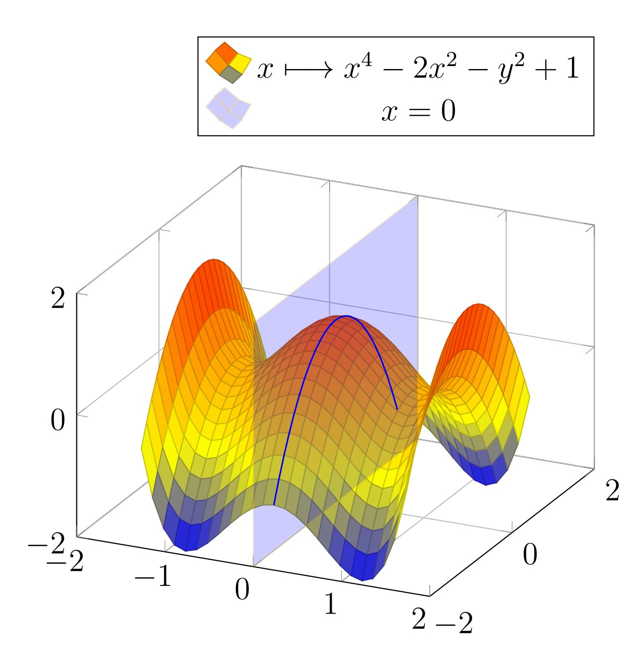
Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction réelle de deux variables et $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

1. La courbe de la fonction partielle $f(\cdot, b)$ est l'intersection de la surface $\mathcal{S}_f$ avec le plan d'équation $y = b$.
2. La courbe de la fonction partielle $f(a, \cdot)$ est l'intersection de la surface $\mathcal{S}_f$ avec le plan d'équation $x = a$.

Exemple 9. On reprend la fonction g de l'exemple 4.



Représentation de $g(\cdot, 0)$



Représentation de $g(0, \cdot)$

2) Dérivées partielles

Définition 10

Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction réelle de deux variables.

1. Si la fonction partielle $f(\cdot, b)$ est dérivable en a, on dit que f admet une **dérivée partielle par rapport à la première variable** en (a, b). Cette dérivée partielle, notée $\dfrac{\partial f}{\partial x}(a, b)$, est alors égale au nombre dérivé de $f(\cdot, b)$ en a.
2. Si la fonction partielle $f(a, \cdot)$ est dérivable en b, on dit que f admet une **dérivée partielle par rapport à la seconde variable** en (a, b). Cette dérivée partielle, notée $\dfrac{\partial f}{\partial y}(a, b)$, est alors égale au nombre dérivé de $f(a, \cdot)$ en b.

Exemple 11. On reprend la fonction $f : (x, y) \longmapsto x^2y - y^2 + xy - 1$ de l'exemple 2.
Montrer que f admet des dérivées partielles par rapport à chacune des variables en $(-1, 2)$.

Définition 12

Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction réelle de deux variables réelles. Si f admet des dérivées partielles selon les deux variables en tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on dit que f admet des **fonctions dérivées partielles sur** $\mathbb{R}^2$ qui sont notées respectivement $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ et qui sont définies sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$\frac{\partial f}{\partial x} : (x\,;y) \longmapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial f}{\partial y} : (x\,;y) \longmapsto \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$$

Remarque 13. D'un point de vue pratique, calculer la dérivée partielle de f par rapport à x (resp. y) revient à considérer y (resp. x) comme une constante et à dériver f par rapport à la seule variable x (resp. y).

Exemple 14.

1. Justifier que la fonction $f : (x, y) \longmapsto x^2y - y^2 + xy - 1$ admet des fonctions dérivées partielles et les déterminer.
2. Même question avec la fonction $k : (x, y) \longmapsto \sin(xy)\mathrm{e}^{x^2}$.

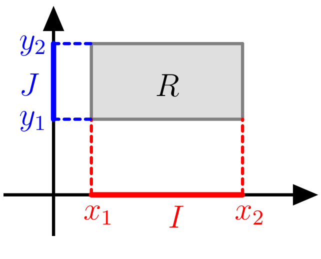
III. — Extremums

1) Définition

Définition 15

Un **rectangle** de $\mathbb{R}^2$ est le produit cartésien R de deux segments $I = [x_1\,;x_2]$ et $J = [y_1\,;y_2]$ avec $x_1 < x_2$ et $y_1 < y_2$. Ainsi,

$$\begin{aligned} R = I \times J &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in I \text{ et } y \in J\} \\ &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 \leqslant x \leqslant x_2 \text{ et } y_1 \leqslant y \leqslant y_2\} \end{aligned}$$



On dit qu'un tel rectangle R **contient un point** (a, b) **dans son intérieur** si $x_1 < a < x_2$ et $y_1 < b < y_2$.

Exemple 16. $R = [-1\,;1] \times [-3\,;7]$ est un rectangle de $\mathbb{R}^2$. Ce rectangle contient les points $(0,1)$ et $(1,0)$. De plus, il contient $(0,1)$ dans son intérieur mais pas $(1,0)$.

Définition 17

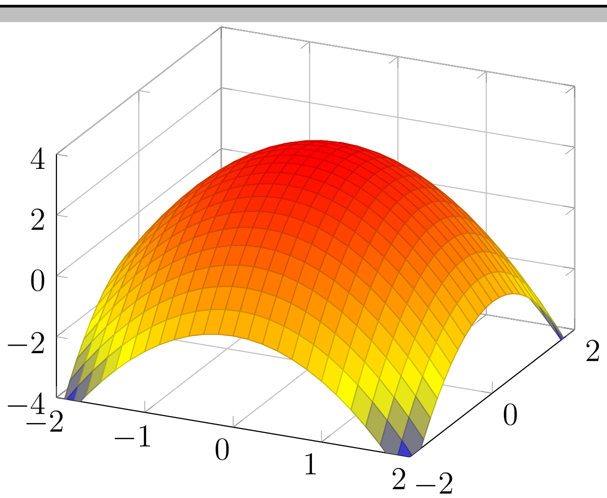
Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction réelle de deux variables et $(a,b) \in \mathbb{R}^2$.

1. On dit que f admet un **maximum global** en (a,b) si, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$,
$$f(x,y) \leqslant f(a,b).$$
Le nombre réel $f(a,b)$ est alors appelé le **maximum** de f.
2. On dit que f admet un **minimum global** en (a,b) si, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$,
$$f(x,y) \geqslant f(a,b).$$
Le nombre réel $f(a,b)$ est alors appelé le **minimum** de f
3. Un minimum global ou un maximum global, s'il existe, s'appelle un **extremum global** de f.

Exemple 18. Montrer que la fonction

$$p: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & 3 - x^2 - y^2 \end{array}$$

admet un maximum global et déterminer la valeur de celui-ci.



Définition 19

Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction réelle de deux variables et $(a,b) \in \mathbb{R}^2$.

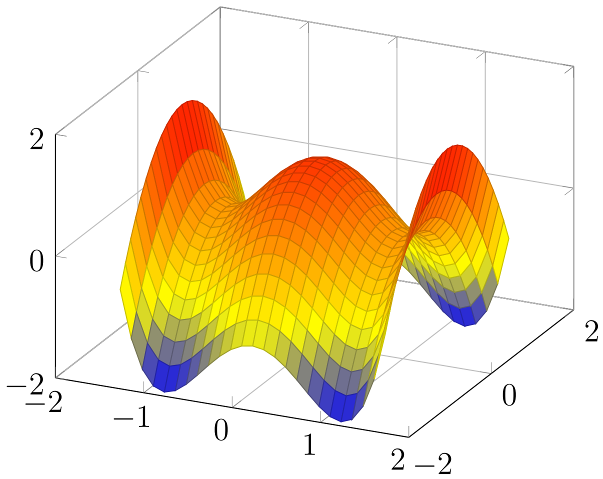
1. On dit que f admet un **maximum local** en (a,b) s'il existe un rectangle R de $\mathbb{R}^2$ contenant (a,b) dans son intérieur tel que, pour tout $(x,y) \in R$,
$$f(x,y) \leqslant f(a,b).$$
Le nombre réel $f(a,b)$ est alors appelé un **maximum local** de f.
2. On dit que f admet un **minimum local** en (a,b) s'il existe un rectangle R de $\mathbb{R}^2$ contenant (a,b) dans son intérieur tel que, pour tout $(x,y) \in R$,
$$f(x,y) \geqslant f(a,b).$$
Le nombre réel $f(a,b)$ est alors appelé un **minimum local** de f
3. Un minimum local ou un maximum local, s'il existe, s'appelle un **extremum local** de f.

Remarque 20. Un extremum global est en particulier un extremum local mais la réciproque est fausse en général.

Exemple 21. Montrer que la fonction

$$g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & x^4 - 2x^2 - y^2 + 1 \end{array}$$

admet un maximum local en $(0,0)$ mais que celui-ci n'est pas un maximum global.



2) Point critique et recherche d'extremum

Définition 22

Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction réelle de deux variables admettant des dérivées partielles sur $\mathbb{R}^2$.

On dit que $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ est un **point critique** de f si $\dfrac{\partial f}{\partial x}(a,b) = 0$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(a,b) = 0$.

Exemple 23. Déterminer les points critiques des fonctions $p : (x,y) \longmapsto 3 - x^2 - y^2$ et $g : (x,y) \longmapsto x^4 - 2x^2 - y^2 + 1$.

Théorème 24

Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction réelle de deux variables admettant des dérivées partielles sur $\mathbb{R}^2$.

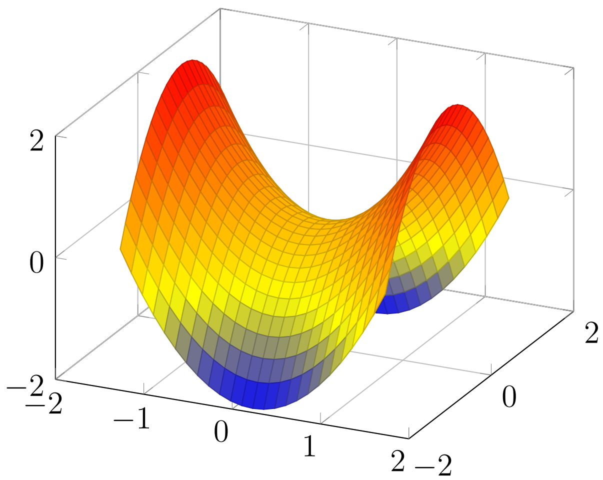
Si f admet un extremum local en $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ alors (a,b) est un point critique de f.

Exemple 25. Déterminer tous les extremums des fonctions p et g de l'exemple précédent.

Exemple 26. On considère la fonction

$$s : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & x^2 - y^2 \end{array}$$

1. La fonction s admet-elle des points critiques ?
2. La fonction s admet-elle des extremums ?



Remarque 27. La réciproque du théorème 24 est fausse comme le montre l'exemple de la fonction s : un point critique ne correspond pas toujours à un extremum de la fonction.

IV. — Exercices

Exercice 1. On considère les fonctions suivantes :

$$f : (x, y) \longmapsto xy^2 - y + \mathrm{e}^{xy} \qquad \text{et} \qquad g : (x, y) \longmapsto \arctan(x^2 y).$$

Montrer que ces fonctions admettent des dérivées partielles et les déterminer.

Exercice 2. Dans chacun de cas suivants, on admet l'existence des dérivées partielles de f. Calculer, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y)$.

1. $f : (x, y) \longmapsto x^2 + xy + y^3$;
2. $f : (x, y) \longmapsto \dfrac{1 + x}{1 + y^2}$;
3. $f : (x, y) \longmapsto \sin(x^2 + y^2)$;
4. $f : (x, y) \longmapsto \mathrm{e}^{x+y} - \mathrm{e}^{x-y}$;

Exercice 3. Déterminer les points critiques de la fonction

$$f : (x, y) \longmapsto x^3 + y^3 - 3xy.$$

On admettra l'existence des dérivées partielles de f.

Exercice 4. Reprendre l'exercice précédent avec

$$f : (x, y) \longmapsto xy(1 - x - y).$$

Exercice 5. On définit une fonction f sur $\mathbb{R}^2$ en posant pour tous réels x et y,

$$f(x, y) = x^2 + y^2 - 2x.$$

1. Soit $a \in \mathbb{R}$. On considère la fonction P définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $P(x) = x^2 + a^2 - 2x$. Justifier que, pour tout réel x, $P(x) \geqslant a^2 - 1$.
2. On admet que f admet des dérivées partielles. Calculer celles-ci.
3. En déduire tous les points $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ en lesquels f admet un minimum global.

Exercice 6. Étudier les éventuels extremums de la fonction $k : (x, y) \longmapsto \sin(xy)\mathrm{e}^{x^2}$ de l'exemple 14 du cours.

Exercice 7. On considère la fonction

$$f : (x, y) \longmapsto \sin(x)\sin(y)\sin(x + y).$$

On admet l'existence des dérivées partielles de f.

1. Démontrer que, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \sin(y)\sin(2x + y) \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \sin(x)\sin(x + 2y)$$

2. Déterminer les points critiques de f qui sont intérieurs au rectangle $R = \left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]^2$.
3. On admet que f admet un maximum local dans le rectangle R et que ce maximum est atteint en un point intérieur au rectangle.
   Déterminer la valeur de ce maximum.

Exercice 8. on considère la fonction réelle f de deux variables réelles définie par :

$$f : (x, y) \longmapsto x^4 + y^4 - 4xy.$$

On admet l'existence des dérivées partielles de f

1. Déterminer les points critiques de f.

2. Calculer, pour tout réel t, $f(t, 0)$ et $f(t, t)$. Que peut-on en déduire ?

3. Montrer que, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$f(x, y) - (-2) = (x^2 - 1)^2 + (y^2 - 1)^2 + 2(x - y)^2.$$

Que peut-on en déduire ?

Exercice 9. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$f(x, y) = x\mathrm{e}^{1-y} + y\mathrm{e}^{1-x}.$$

On admet l'existence des dérivées partielles de f.

1. Calculer les dérivées partielles de f.

2. Soit (a, b) un point critique de f .

a. Montrer que $\mathrm{e}^{1-b} = b\mathrm{e}^{1-a}$ et $\mathrm{e}^{1-a} = a\mathrm{e}^{1-b}$. En déduire que $ab = 1$, puis que $\mathrm{e}^{1-a} = a\mathrm{e}^{1-\frac{1}{a}}$.

b. Justifier que $\mathrm{e}^{1-x} - t\mathrm{e}^{1-\frac{1}{x}} > 0$ pour tout $x < 0$.

c. Déterminer le sens de variation de la fonction $\varphi : x \longmapsto \mathrm{e}^{1-x} - x\mathrm{e}^{1-\frac{1}{x}}$ sur $]0\,;+\infty[$.

d. Calculer $\varphi(1)$ et en déduire l'unique point critique de f.

3. Déterminer les $\mathrm{DL}_2(0)$ de $g : t \longmapsto f(1 + t, 1 + t) - 2$ et de $h : t \longmapsto f(1 + t, 1 - t) - 2$.
Que peut-on en déduire concernant les extremums de f ?

Exercice 10. On définit deux fonctions f et g en posant, pour tout réel x :

$$f(x) = \frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2} \qquad \text{et} \qquad g(x) = \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2}.$$

On considère la fonction $h : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, par :

$$h(x, y) = (f(x))^2 - (g(y))^2.$$

On cherche un éventuel extremum local pour cette fonction. On admet l'existence des dérivées partielles de h.

1. Montrer que g est une fonction impaire et strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

2. Calculer $h(x, x)$ pour tout réel x.

3. a. Montrer que, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $\dfrac{\partial h}{\partial x}(x, y) = g(2x)$.

b. Exprimer selon la même méthode $\dfrac{\partial h}{\partial y}(x, y)$ pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

c. Question de cours : énoncer une condition nécessaire pour qu'en un point (x, y) de $\mathbb{R}^2$, la fonction h admette un extremum local.

d. Donner le seul point qui satisfait cette condition, pour la fonction h, dans cet exercice.

4. a. Donner le signe de $h(x, 0) - h(0, 0)$ lorsque x est un réel.

b. Étudier aussi le signe de $h(0, x) - h(0, 0)$ lorsque x est un réel.

5. Conclure

Exercice 11.

A. Une fonction trinôme du second degré

Soir a un nombre réel, fixé. On considère la fonction polynôme P, de degré 2, définie pour tout réel x par :

$$P(x) = x^2 - 2x + a^2 + 2.$$

1. Calculer, en fonction de a, le discriminant de P. Donner le signe de ce discriminant.

2. En déduire le signe de P.

3. Donner le sens de variation de la fonction P, montrer que P admet un minimum sur $\mathbb{R}$ et donner la valeur de ce minimum. Dresser le tableau de variations de la fonction P. on fera également apparaître les limites en $+\infty$ et en $-\infty$.

B. Étude d'une fonction d'une variable réelle

Dans cette partie, a désigne toujours un nombre réel. On considère la fonction f définie pour tout réel x par :

$$f(x) = \frac{1}{x^2 - 2x + a^2 + 2}.$$

1. Montrer que f est bien définie pour tout réel x.

2. Donner le signe de $f(x)$ pour tout réel x.

3. Donner le sens de variation de f, et les limites en $+\infty$ et en $-\infty$.

4. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) \leqslant \dfrac{1}{a^2+1}$.

5. Dresser un tableau résumant les informations précédentes : variations de f, valeur du maximum, et limites.

C. Une fonction de deux variables

On envisage la fonction de deux variables réelles :

$$u(x, y) = \frac{1}{x^2 - 2x + y^2 + 2}.$$

On pourra librement utiliser les résultats de la partie précédente, en particulier en posant $a = y$.

1. Montrer que, pour tous réels x et y, on a $0 < u(x, y) \leqslant 1$.

2. Montrer que :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) = 2(1 - x) \times (u(x, y))^2.$$

On admettra sans justification que u est effectivement dérivable par rapport à x.

3. Calculer de même $\dfrac{\partial u}{\partial x}(x, y)$ en fonction de x et de y. On admettra sans justification que u est effectivement dérivable par rapport à y.

4. **a.** Question de cours : supposons que u admette un extremum local en (x_0, y_0). Que dire de $\dfrac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0)$ et $\dfrac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0)$?

b. Application : donner tous les couples $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ tels que :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad u(x, y) \leqslant u(x_0, y_0).$$

5. Existe-t-il un couple $(x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2$ tel que :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad u(x, y) \geqslant u(x_1, y_1).$$