# ⧫ Chapitre 12. Équations différentielles

Dans toute la suite, $I$ désigne un intervalle non réduit à un singleton.

## I. — Équations linéaires d'ordre 1 et 2 à coefficients constants

### 1) Équations différentielles linéaires du premier ordre à coefficients constants (Rappels de 1ère année)

**Définition 1**

Une équation différentielle linéaire du premier ordre à coefficients constants (EDL1) sur $I$ est une équation différentielle de la forme

$$y' + ay = f(t)$$

où $f$ est une fonction continue sur $I$ et $a$ est une constante réelle.

Résoudre une telle équation sur $I$, c'est déterminer l'ensemble des solutions c'est-à-dire l'ensemble des fonctions $g$ dérivables sur $I$ telles que

$$\forall t \in I \quad g'(t) + ag(t) = f(t).$$

Si $f$ est la fonction nulle, on dit que l'équation différentielle est homogène.

**Exemple 2.** $(E_1) : y' + 3y = t$ est une EDL1 et $(H) : y' + 3y = 0$ est l'équation différentielle homogène associée.

**Théorème 3. — Solutions d'une EDL1 homogène**

Soit $a$ un réel. Alors, les solutions de l'équation différentielle $(H) : y' + ay = 0$ sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions $t \longmapsto C\mathrm{e}^{-at}$ où $C$ est une constante quelconque.

**Théorème 4. — Solutions d'une EDL1 quelconque**

O Soit $a$ un réel, $f$ une fonction continue sur $I$ et $(E) : y' + ay = f(t)$. Supposons que $g_0$ soit une solution particulière de $(E)$ sur $I$. Alors, l'ensemble des solutions $(E)$ sur $I$ est l'ensemble des fonctions

$$g : t \longmapsto g_0(t) + C\mathrm{e}^{-at}$$

où $C$ est une constante réelle. Autrement dit, les solutions de $(E)$ s'obtiennent en ajoutant à la solution particulière $g_0$ les solutions de l'équation homogène $(H)$ associée à $(E)$.

**Exemple 5.**

1. Résoudre l'équation $(E_1) : y' + 3y = t$ sur $\mathbb{R}$. On cherchera une solution particulière sous la forme d'une fonction affine.
2. Résoudre l'équation $(E_2) : y' - 7y = \mathrm{e}^t$ sur $\mathbb{R}$. On cherchera une solution particulière sous la forme $g_0 : t \longmapsto \lambda\mathrm{e}^t$ où $\lambda \in \mathbb{R}$.

**Propriété 6. — Principe de superposition**

On considère un réel $a$, deux fonctions $f_1$ et $f_2$ continues sur $I$ et $(E_1) : y' + ay = f_1(t)$ et $(E_2) : y' + ay = f_2(t)$. Si $g_1$ est solution de $(E_1)$ et $g_2$ est solution de $(E_2)$ alors $g_1 + g_2$ est solution de $(E) : y' + ay = f_1(t) + f_2(t)$.

**Exemple 7.** Déterminer une solution de $(E_3) : y' + 3y = \mathrm{e}^t$ de la forme $t \longmapsto \lambda \mathrm{e}^t$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$ puis résoudre l'équation $(E_4) : y' + 3y = t + \mathrm{e}^t$.

## 2) Équations différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants

**Définition 8**

Une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants (EDL2) sur $I$ est une équation différentielle de la forme

$$y'' + ay' + by = f(t)$$

où $f$ est une fonction continue sur $I$ et $a$ et $b$ sont deux constantes réelles.

Résoudre une telle équation sur $I$, c'est déterminer l'ensemble des solutions c'est-à-dire l'ensemble des fonction $g$ deux fois dérivables sur $I$ telles que

$$\forall t \in I \quad g''(t) + ag'(t) + bg(t) = f(t).$$

Si $f$ est la fonction nulle, on dit que l'équation différentielle est homogène.

**Exemple 9.** $(E_5) : y'' + 7y' + 6y = t$ est une EDL2 sur $\mathbb{R}$ et l'équation homogène associée est $y'' + 7y' + 6y = 0$.

**Définition 10**

Soit $(E) : y'' + ay' + by = f(t)$ une EDL2. On appelle équation caractéristique associée à (E) l'équation du second degré $x^2 + ax + b = 0$.

**Théorème 11. — Solutions d'une EDL2 homogène**

Soit $a$ et $b$ deux réels et $(H) : y'' + ay' + by = 0$.

1. Si l'équation caractéristique associée à $(H)$ possède deux solutions réelles $r_1$ et $r_2$ alors les solutions de $(H)$ sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions $g : t \longmapsto A\mathrm{e}^{r_1 t} + B\mathrm{e}^{r_2 t}$ où $A$ et $B$ sont des constantes réelles.
2. Si l'équation caractéristique associée à $(H)$ possède une unique solution $r_0$ alors les solutions de $(H)$ sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions $g : t \longmapsto (At + B)\mathrm{e}^{rt}$ où $A$ et $B$ sont des constantes réelles.
3. Si l'équation caractéristique associée à $(H)$ possède deux solutions complexes conjuguées $r = \alpha + \mathrm{i}\beta$ et $\overline{r} = \alpha - \mathrm{i}\beta$ alors les solutions de $(H)$ sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions $g : t \longmapsto \mathrm{e}^{\alpha t}(A\cos(\beta t) + B\sin(\beta t))$ où $A$ et $B$ sont des constantes réelles.

**Théorème 12. — Solutions d'une EDL2**

Soit $a$ un réel, $f$ une fonction continue sur $I$ et $(E) : y'' + ay' + by = f(t)$. Supposons que $g_0$ soit une solution particulière de $(E)$ sur $I$. Alors, l'ensemble des solutions $(E)$ sur $I$ est l'ensemble des fonctions

$$g : t \longmapsto g_0(t) + h(t)$$

où $h$ est une solution de l'équation homogène $(H)$ associée à $(E)$. Autrement dit, les solutions de $(E)$ s'obtiennent en ajoutant à la solution particulière $g_0$ les solutions de l'équation homogène $(H)$.

**Exemple 13.**

1. Résoudre l'équation $(E_5)$ sur $\mathbb{R}$. On cherchera une solution particulière sous la forme d'une fonction affine.
2. Résoudre l'équation $(E_6) : y'' - 3y = \cos(t)$ sur $\mathbb{R}$. On cherchera une solution particulière sous la forme $g_0 : t \longmapsto \lambda \cos(t)$ où $\lambda \in \mathbb{R}$.

**Propriété 14. — Principe de superposition**

Soit $a \in \mathbb{R}$, $f_1$ et $f_2$ deux fonctions continues sur $I$ et $(E_1) : y'' + ay + by = f_1(t)$ et $(E_2) : y'' + ay' + by = f_2(t)$. Si $g_1$ est solution de $(E_1)$ et $g_2$ est solution de $(E_2)$ alors $g_1 + g_2$ est solution de $(E) : y'' + ay' + by = f_1(t) + f_2(t)$.

**Exemple 15.** Déterminer une solution de l'équation $(E_9) : y'' + 7y' + 6y = \cos(t)$ sous la forme $t \longmapsto \lambda \cos(t) + \mu \sin(t)$ avec $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ puis résoudre l'équation $(E_{10}) : y'' + 7y' + 6y = t + \cos(t)$.

# II. — Exemples d'équations différentielles non linéaires

Les équations différentielles précédentes sont linéaires ce qui signifie que le membre de gauche est une combinaison linéaire de $y$ et de ses dérivées. On rencontre cependant en sciences des phénomènes qui sont régis par des équations différentielles non linéaires.

## 1) Premier exemple : l'équation $y' + ky^2 = 0$

En cinétique chimique, une réaction d'ordre $a$ est une réaction dans laquelle la vitesse de réaction est proportionnelle à la puissance $a$ de la concentration du réactif. Autrement dit, la concentration $[A]$ du réactif $A$ vérifie une relation de la forme $-\dfrac{\mathrm{d}[A]}{\mathrm{d}t} = k[A]^a$.

Si la réaction est d'ordre 1, la concentration est donc solution de l'EDL1

$$y' + ky = 0.$$

En revanche, si la réaction est d'ordre 2, la concentration est solution de l'équation différentielle non linéaire

$$(F) : y' + ky^2 = 0.$$

Pour résoudre une telle équation, on admettra que les solutions qui ne sont pas identiquement nulles sur $[0\,;+\infty[$ ne s'annule pas sur $[0\,;+\infty[$.

**Propriété 16**

Soit $k \in \mathbb{R}_+^*$. Les solutions non nulles de $(F)$ sur $[0\,;+\infty[$ sont les fonctions de la forme $t \longmapsto \dfrac{1}{kt+c}$ où $c$ est une constante réelle positive.

### 2) Second exemple : l'équation logistique normalisée $y' = y(1-y)$

En dynamique des populations, le mathématicien belge Pierre-François Verhulst a proposé, au milieu du XIXe siècle, de modéliser l'évolution d'une population $y$ en fonction du temps par l'équation différentielle

$$y' = y \times (a - by)$$

où $a$ et $b$ sont des réels strictement positifs. Dans le cas particulier où $a = b = 1$, on obtient l'équation

$$(L) : y' = y \times (1 - y)$$

appelée équation logistique normalisée.

**Propriété 17**

Les solutions de $(L)$ sur $[0\,;+\infty[$ sont les fonctions de la forme $t \longmapsto \dfrac{1}{1+C\mathrm{e}^{-t}}$ où $C$ est une constante réelle strictement supérieure à $-1$.

## III. — Exercices

**Exercice 1.**

1. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle $(E_1) : y = 2y'$.
2. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle $(E_2) : y' + 3y = \mathrm{e}^{-3t}$ ; on cherchera une solution particulière sous la forme $t \longmapsto At\mathrm{e}^{-3t}$ où $A \in \mathbb{R}$.
3. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle $(E_3) : y' - y = 1 + t^2$ ; on cherchera une solution particulière sous la forme d'un polynôme du second degré.

**Exercice 2.**

1. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle $(E_1) : y'' - 3y' - 10y = \mathrm{e}^t$ ; on cherchera une solution particulière sous la forme $t \longmapsto K\mathrm{e}^t$ où $K \in \mathbb{R}$.
2. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle $(E_2) : y'' - 2y' + y = \cos(t)$ ; on chercher une solution particulière sous la forme $t \longmapsto K\sin(t)$ où $K \in \mathbb{R}$.
3. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle $(E_3) : y'' - 2y' + 5y = t^2$ ; on cherchera une solution particulière sous la forme d'un polynôme du second degré.

**Exercice 3.** Soit $\alpha > 1$ et $k > 0$. En s'inspirant de la démonstration de la propriété 16, déterminer les solutions strictement positives sur $[0\,;+\infty[$ de l'équation différentielle $(E) : y' + ky^\alpha = 0$.

**Exercice 4.** Déterminer les solutions sur $[0\,;+\infty[$ de l'équation différentielle $y' = \mathrm{e}^{-y}$.

**Exercice 5.** Résoudre sur l'intervalle $I = \left]-\dfrac{\pi}{2}\,;\dfrac{\pi}{2}\right[$ l'équation différentielle $y' = 1 + y^2$ avec la condition initiale $y(0) = 0$.

**Exercice 6.** En posant $z = \ln(y)$, déterminer les solutions strictement positives sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $(E) : y' = y\ln(y)$.

**Exercice 7.** Soit $a$ et $b$ deux réels strictement positifs. On considère, sur $I = [0\,;+\infty[$, l'équation différentielle de Verhulst :

$$(V) : y' = y \times (a - by).$$

**1.** Montrer que $(V)$ est équivalente à $(V') : y' = ay \times \left(1 - \dfrac{y}{K}\right)$ où $K = \dfrac{b}{a}$.

**2.** Résoudre sur $I$ l'équation différentielle $(W) : z' + az = aK$. On cherchera une solution particulière sous la forme d'une constante.

**3.** En posant $z = \dfrac{1}{y}$, déterminer les solutions de $(V')$ qui ne s'annulent pas sur $I$.

**Exercice 8.**

**1.** Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle $(F) : z' + z = \dfrac{t+1}{2}$. On cherchera une solution particulière sous la forme d'une fonction affine.

**2.** En posant $z = \sqrt{y}$, déterminer les fonctions strictement positives qui sont solutions sur $[0\,;+\infty[$ de l'équation différentielle $(E) : y' = (t+1)\sqrt{y} - 2y$.

**Exercice 9.** On considère l'équation différentielle $(E) : ty'' - y' - t^3y = 0$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

**1.** Supposons que $g$ soit une solution de $(E)$ sur $\mathbb{R}_+^*$. Considérons la fonction $h : t \longmapsto g(\sqrt{t})$.

**a.** Exprimer, pour tout $t > 0$, $g(t)$ en fonction de $h$ et de $t$.

**b.** Calculer, pour tout $t > 0$, $g'(t)$ et $g''(t)$ en fonction des dérivées de $h$ et de $t$.

**c.** Montrer que $h$ est solution sur $\mathbb{R}_+^*$ de l'équation différentielle $(F) : y'' - \dfrac{1}{4}y = 0.$.

**d.** Déterminer la forme de $h$ puis celle de $g$.

**2.** Déterminer l'ensemble des solutions de $(E)$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

**Exercice 10.** Soit un réel $k > 0$. On considère sur $I = [0\,;+\infty[$ l'équation différentielle

$$(E) : y' + ky^2 = 0.$$

On admet qu'une solution non nulle de $(E)$ sur $I$ ne s'annule pas sur $I$.

**1.** Soit $y$ une solution de $(E)$ qui ne s'annule pas sur $I$.

**a.** Montrer que la fonction $u : x \longmapsto \dfrac{1}{y(x)}$ est bien définie sur $I$, qu'elle est dérivable sur $I$ et calculer sa dérivée en fonction de $y$ et de $y'$.

**b.** Montrer que, pour tout $x \in I$, $u'(x) = k$.

**c.** En déduire qu'il existe un réel $a > 0$ tel que, pour tout $x \in I$, $y(x) = \dfrac{1}{kx + a}$.

**2.** On dispose de trois fonctions $y_1$, $y_2$ et $y_3$, que l'on suppose définies et dérivables sur $I$. On dispose de certaines valeurs numériques, prises par les fonctions $y_1$, $y_2$ et $y_3$, résumées dans le tableau suivant :

| $x$ | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| $y_1(x)$ | 1 | $\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{5}$ | $\frac{1}{7}$ |
| $y_2(x)$ | 9 | 5 | 3 | 2 |
| $y_3(x)$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{5}$ | $-\frac{1}{4}$ | $-1$ |

**a.** Justifier que $y_1$, $y_2$ et $y_3$ sont continues sur $I$.

**b.** Montrer que $y_3$ s'annule sur $I$. Expliquer pourquoi $y_3$ ne peut pas être solution de l'équation $(E)$.

**c.** Donner, à partir du tableau ci-dessus, un tableau de valeurs pour les deux fonctions $\dfrac{1}{y_1}$ et $\dfrac{1}{y_2}$. Expliquer alors pourquoi seule une des deux fonctions $y_1$ ou $y_2$ peut être solution de l'équation $(E)$ et préciser laquelle.

**d.** En admettant que cette fonction soit bien solution de $(E)$, quelles seraient les valeurs de $a$ et de $k$. Donner alors l'expression de cette solution en fonction de $x$.