⧫ Chapitre 11. Réduction des endomorphismes

Dans toute la suite, K désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et E est un K-espace vectoriel de dimension finie n.

I. — Éléments propres

1) Éléments propres d'un endomorphisme

Définition 1

Soit f un endomorphisme de E et λ un scalaire. On dit que λ est une **valeur propre** de f s'il existe un vecteur non nul $x \in E$ tel que $f(x) = \lambda x$.

Exemple 2.

1. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ défini par $f(x, y) = (3x + 5y, x - y)$.
   Calculer $f(-1, 1)$ et $f(5, 1)$ et en déduire deux valeurs propres de f.
2. Soit g l'endomorphime de $\mathbb{R}_2[X]$ défini par $g(P) = P + XP'$.
   Calculer $g(X^2)$ et en déduire une valeur propre de g.

Définition 3

L'ensemble des valeurs propres d'un endomorphisme f s'appelle le **spectre** de f. On le note $\mathrm{Sp}(f)$.

Remarque 4. Il se peut qu'un endomorphisme n'admette pas de valeurs propres et, dans ce cas, $\mathrm{Sp}(f) = \varnothing$.

Exemple 5. Montrer que le spectre de l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ défini par $f(x, y) = (x-2y, x-y)$ est vide.

Définition 6

Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ et $\lambda \in \mathrm{Sp}(f)$. Un vecteur non nul $x \in E$ tel que $f(x) = \lambda x$ est appelé un **vecteur propre** de f associé à la valeur propre λ.

Propriété 7

Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ et $\lambda \in K$. L'ensemble

$$E_\lambda(f) = \{x \in E \mid f(x) = \lambda x\}$$

est un sous-espace vectoriel de E.

Propriété 8. — Caractérisation des valeurs propres

Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ et $\lambda \in K$. Alors, les six propositions suivantes sont équivalentes :

1) $\lambda \in \mathrm{Sp}(f)$

2) $E_\lambda(f) \neq \{0_E\}$

3) $f - \lambda \mathrm{Id}_E$ n'est pas injective

4) $f - \lambda \mathrm{Id}_E$ n'est pas surjective

5) $f - \lambda \mathrm{Id}_E$ n'est pas bijective

6) $\mathrm{rg}(f - \lambda \mathrm{Id}_E) < n$.

Remarque 9. En particulier, $0 \in \mathrm{Sp}(f)$ si et seulement si f n'est pas injective.

Définition 10

Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ et $\lambda \in \mathrm{Sp}(K)$. Alors, l'ensemble $E_\lambda(f)$ s'appelle le **sous-espace propre** associé à la valeur propre λ.

Remarque 11. Si $f \in \mathscr{L}(E)$ et $\lambda \in \mathrm{Sp}(K)$ alors l'ensemble de vecteurs propres associés à la valeur propre λ est $E_\lambda(f) \setminus \{0_E\}$.

Exemple 12. Soit f l'application de $\mathbb{R}_2[X]$ défini par $f(P) = (2X+1)P - (X^2-1)P'$. On admet que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$.

1. Montrer que $P_1 = -X^2 + 1$ et $P_2 = X^2 + 2X + 1$ sont des vecteurs propres de f.

2. Montrer que $-1 \in \mathrm{Sp}(f)$ et déterminer $E_{-1}(f)$.

2) Éléments propres d'une matrice carrée

Étant donné une matrice carrée $A \in \mathscr{M}_n(K)$, on peut considérer l'endomorphisme $f \in \mathscr{L}(K^n)$ canoniquement associé à A.

Définition 13

1. Les **valeurs propres** de A sont les valeurs propres de f. L'ensemble des valeurs propres de A s'appelle le **spectre** de A et se note $\mathrm{Sp}(A)$. On a donc $\mathrm{Sp}(A) = \mathrm{Sp}(f)$.

2. Si $\lambda \in \mathrm{Sp}(A)$, les **vecteurs propres** de A associés à λ sont les matrices colonnes des coordonnées des vecteurs propres de f associée à λ.

3. On note $E_\lambda(A) = \{V \in \mathscr{M}_{n,1}(K) \mid AV = \lambda V\}$ qui est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_{n,1}(K)$.

4. Si $\lambda \in \mathrm{Sp}(A)$ alors $E_\lambda(A)$ s'appelle le **sous-espace propre** associé à la valeur propre λ.

Propriété 14

Soit $\lambda \in K$. On déduit des résultats de la première section qu'il y a équivalence entre les propositions suivantes :

1) $\lambda \in \mathrm{Sp}(A)$

2) $E_\lambda(A) \neq \{0_{\mathscr{M}_{n,1}(K)}\}$

3) $A - \lambda I_n$ n'est pas inversible

4) $\mathrm{rg}(A - \lambda I_n) < n$.

De plus, si $\lambda \in \mathrm{Sp}(A)$ alors $\dim(E_\lambda(A)) = n - \mathrm{rg}(A - \lambda I_n)$.

Exemple 15. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer $\ker(A)$ et en donner une base. Que peut-on en déduire concernant les éléments propres de A ?
2. Déterminer $\mathrm{Im}(A)$. Que peut-on en déduire concernant les éléments propres de A ?

Remarque 16. Dans certains sujets de concours, on identifie totalement une matrice et l'endomorphisme canoniquement associé de sorte qu'on voit les vecteurs propres d'une matrice comme des éléments de K^n plutôt que comme des éléments de $\mathscr{M}_{n,1}(K)$.

3) Recherche pratique des éléments propres d'une matrice

Dans la pratique, on peut toujours ramener la recherche des éléments propres d'un endomorphisme de E à celui de sa matrice dans une base. Dans la suite, on s'intéresse donc seulement aux cas des matrices.

a) Cas des matrices carrées d'ordre 2

Rappel. Si $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ est une matrice carrée d'ordre 2 alors on définit le déterminant de M, noté $\det(M)$, par $\det(M) = ad - bc$. Alors, M est inversible si et seulement si $\det(M) \neq 0$.

Ainsi, M n'est pas inversible si et seulement si $\det(M) = 0$. On en déduit que si $A \in \mathscr{M}_2(K)$ et $\lambda \in K$ alors $\lambda \in \mathrm{Sp}(A)$ si et seulement si $\det(A - \lambda I_2) = 0$.

Exemple 17.

1. Déterminer les éléments propres de la matrice $A = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$.
2. On reprend l'application f de l'exemple 5 mais en la voyant cette fois-ci comme un endomorphisme de $\mathbb{C}^2$. Déterminer alors les éléments propres de f.

b) Cas des matrices triangulaires

Rappel. Le rang d'une matrice triangulaire est égal au nombre d'élements non nuls sur sa diagonale. En particulier, une matrice triangulaire T n'est pas inversible si et seulement si l'un, au moins, de ses éléments diagonaux est nul.

On en déduit que si A est triangulaire alors $\lambda \in K$ est valeur propre de A si et seulement si $A - \lambda I_n$ possède un élément nul sur sa diagonale, ce qui revient à dire que λ est un élément de la diagonale de A. Ainsi, si A est triangulaire alors $\mathrm{Sp}(A)$ est l'ensemble des éléments diagonaux de A.

Tout ceci est en particulier vrai si A est diagonale puisqu'une matrice diagonale est un cas particulier de matrice triangulaire.

Exemple 18. On considère l'endomorphisme de $\mathbb{R}_3[X]$ défini par $f(P) = P + (X+1)P' - X^2P''$.

1. Déterminer la matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$.
2. En déduire les valeurs propres de f ainsi que les sous-espaces propres associés.

c) Cas général

Dans le cas général,

- soit l'énoncé demande de vérifier qu'un vecteur non nul V est vecteur propre de A et alors on calcule AV et on constate qu'il existe $\lambda \in K$ tel que $AV = \lambda V$ (comme dans les exemples 2 et 12) ;
- soit l'énoncé demande de vérifier qu'un scalaire λ est valeur propre de A et alors on traduit par un système l'égalité $AV = \lambda V$ et on montre que ce système possède au moins une solution non nulle (comme dans l'exemple 12). On peut aussi montrer que la matrice $A - \lambda I_n$ est de rang strictement inférieur à n.
- soit l'énoncé ne donne pas d'indication et, dans ce cas,
  a. on commence par déterminer les valeurs propres en cherchant pour quelles valeurs de λ le système associé à $AV = \lambda V$ n'est pas un système de Cramer ; pour cela, on échelonne le système et on détermine les valeurs de λ telles que le nombre de pivots est strictement inférieur à n ;
  b. une fois qu'on a déterminé le spectre de A, on détermine les vecteurs propres en remplaçant, dans le système échelonné, λ par les différentes valeurs propres puis en résolvant le système ainsi obtenu.

Exemple 19. Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ -2 & 5 & 2 \\ 2 & -3 & 0 \end{pmatrix}$. Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres associés. On donnera une base de chacun des sous-espaces propres.

II. — Diagonalisation

1) Définition

Définition 20

Soit $f \in \mathscr{L}(E)$. On dit que f est **diagonalisable** s'il existe une base $\mathcal{B}$ de E dans laquelle la matrice de f est diagonale.

Propriété 21

Soit $f \in \mathscr{L}(E)$. Alors, f est diagonalisable si et seulement s'il existe une base de E composée de vecteurs propres de f.

Remarque 22. On déduit de la propriété précédente que :

1. il existe des endomorphismes qui ne sont pas diagonalisables (par exemple, l'endomorphisme f de l'exemple 5 n'est pas diagonalisable car $\mathrm{Sp}(f) = \varnothing$) ;

2. si f est diagonalisable et si $\mathcal{B}$ est une base telle que $M = \mathcal{M}at_{\mathcal{B}}(f)$ est diagonale alors les éléments diagonaux de M sont les valeurs propres de f (certaines d'entre elles pouvant être répétées plusieurs fois).

Exemple 23. On considère l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par

$$f(x, y, z) = (2x + y + z, x + 2y + z, x + y + 2x).$$

Calculer $f(-1, 1, 0)$, $f(-1, 0, 1)$ et $f(1, 1, 1)$ et en déduire que f est diagonalisable.

Définition 24

Soit $A \in \mathscr{M}_n(K)$. On dit que A est **diagonalisable** si l'endomorphisme canoniquement associé à A est diagonalisable.

Propriété 25

Soit $A \in \mathscr{M}_n(K)$. Alors, A est diagonalisable si et seulement s'il existe une matrice inversible P telle que $P^{-1}AP$ est diagonale.

Définition 26

Diagonaliser une matrice A, c'est déterminer une matrice inversible P et une matrice diagonale D telles que $A = PDP^{-1}$.

Remarque 27. Avec les notations précédentes, les éléments diagonaux de D sont les valeurs propres de A et les colonnes de P sont les coordonnées de vecteurs propres associés à ces valeurs propres (dans le même ordre).

Exemple 28. Diagonaliser la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$.

2) Conditions de diagonalisabilité

Propriété 29

Soit $f \in \mathscr{L}(E)$.

1. Une famille de vecteurs obtenue en concaténant des bases de sous-espaces propres distincts de f est libre.
2. $\displaystyle\sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(f)} \dim(E_\lambda(f)) \leqslant n$: la somme des dimensions des sous-espaces propres de f est inférieure ou égale à la dimension n de l'espace E.

Théorème 30

Soit $f \in \mathscr{L}(E)$. Alors, f est diagonalisable si et seulement si $\displaystyle\sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(f)} \dim(E_\lambda(f)) = n$.

Exemple 31. La matrice $A = \begin{pmatrix} 5 & -5 & 4 \\ 3 & -2 & 3 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ est-elle diagonalisable ?

Corollaire 32

Soit $f \in \mathscr{L}(E)$. Si $\mathrm{Card}(\mathrm{Sp}(f)) = n$ (i.e. si f admet n valeurs propres distinctes) alors f est diagonalisable.

Exemple 33. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}_3[X]$ défini par $f(P) = P - (X+1)P'$. Montrer que f est diagonalisable.

Rappel. Si $A = (a_{i,j}) \in \mathscr{M}_n(K)$, la transposée de A est la matrice $B = (b_{i,j}) \in \mathscr{M}_n(K)$ telle que, pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $b_{i,j} = a_{j,i}$. On note cette matrice ${}^tA$.

De plus, on dit que A est symétrique si ${}^tA = A$.

Théorème 34. — (Théorème spectral)

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Si A est une matrice symétrique alors A est diagonalisable.

Exemple 35. On considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ défini par

$$f(x,y,z) = (x - y + z, -x + 2y - z, x - y + 3z).$$

1. Justifier que f est diagonalisable.

2. Déterminer les valeurs propres ainsi qu'une base de vecteurs propres de f.

Remarque 36. Le théorème spectral est uniquement vrai pour les matrices à coefficients réels. On peut montrer qu'il existe des matrices symétriques à coefficients complexes qui ne sont pas diagonalisables (voir l'exercice 4).

3) Application de la diagonalisation au calcul de puissances

Propriété 37

Soit $A \in \mathscr{M}_n(K)$. Soit $P \in \mathscr{M}_n(K)$ une matrice inversible et $D = P^{-1}AP$. Alors, pour tout entier $k \in \mathbb{N}$, $A^k = PD^kP^{-1}$.

Remarque 38. L'intérêt de cette propriété réside dans le fait que si A est diagonalisable alors on peut choisir P de telle façon que D soit diagonale et alors D^k est simple à calculer.

Exemple 39. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer les valeurs propres de A.

2. Justifier que A est diagonalisable puis diagonaliser A.

3. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n = \begin{pmatrix} 2 - 2^n & 1 - 2^n \\ 2^{n+1} - 2 & 2^{n+1} - 1 \end{pmatrix}$.

III. — Exercices

Exercice 1. Dans chacun des cas suivants, dire si les vecteurs sont des vecteurs propres de f.

1. f est l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ défini par $f(x,y) = (x + 2y, 4x + 3y)$.

a) $v_1 = (1,0)$ **b)** $v_2 = (1,-1)$ **c)** $v_3 = (1,2)$ **d)** $v_4 = (0,0)$

2. f est l'endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$ défini par $f(P) = X(P(X+1) - P(X))$.

a) $P_1 = 1$ **b)** $P_2 = X$ **c)** $P_3 = X^2$ **d)** $P_4 = X^2 + X$

Exercice 2. Déterminer les valeurs propres de chacun des endomorphismes définis suivants.

$$\textbf{1)}\ f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x\,;y) & \longmapsto & (y\,;x) \end{array} \qquad \textbf{2)}\ f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_2[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_2[X] \\ P & \longmapsto & P(X+1) \end{array}$$

$$\textbf{3)}\ f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x\,;y\,;z) & \longmapsto & (2y-z\,;3x-2y\,;-2x+2y+z) \end{array}$$

Exercice 3. Déterminer les valeurs propres réelles de chacune des matrices suivantes.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Exercice 4. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & \mathrm{i} \\ \mathrm{i} & -1 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{C})$.

1. La matrice A est-elle symétrique ?

2. Déterminer le spectre de A.

3. La matrice A est-elle diagonalisable ?

Exercice 5. Soit $N = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.

1. Déterminer le rang de N et de $N - I_3$. Que peut-on en déduire en terme de valeur propre et de sous-espace propre ?

2. Montrer que f possède trois valeurs propres distinctes.

3. La matrice N est-elle diagonalisable ?

Exercice 6. On définit sur $\mathbb{R}_2[X]$ une application u par $u(P) = P(1)X + P(2)X^2$. Déterminer les valeurs propres et les espaces propres de cet endomorphisme.

Exercice 7. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. a. Calculer $f(1,1,1)$ et en déduire une valeur propre de f.

b. Déterminer la dimension du sous-espace propre correspondant.

2. a. Déterminer le rang de f et en déduire la dimension de $\ker(f)$.

b. En déduire que 0 est valeur propre de f et donner la dimension du sous-espace propre $E_0(f)$.

3. Démontrer que f est diagonalisable.

Exercice 8. La matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ est-elle diagonalisable ?

Exercice 9. On considère les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. a. Justifier que A est diagonalisable et puis diagonaliser A.

b. En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'expression de A^n en fonction de n.

2. Reprendre la question **1.** avec la matrice B.

Exercice 10. On dispose de deux urnes A et B : l'urne A contient 2 boules rouges et 3 boules vertes, tandis que l'urne B contient 4 boules rouges et 1 boule verte. On effectue des tirages avec remise selon le protocole suivant : le premier tirage est fait dans l'urne A ; à chaque tirage, si on tire une boule rouge le tirage suivant est fait dans l'urne A, et si on tire une boule verte le tirage suivant est fait dans l'urne B. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note R_n (resp. V_n) l'évènement réalisé lorsqu'on obtient une boule rouge (resp. verte) au n-ième tirage.

1. Déterminer $\mathbf{P}(R_1)$ et $\mathbf{P}(V_1)$.

2. Déterminer $\mathbf{P}(R_2 \mid R_1)$ et $\mathbf{P}(R_2 \mid V_1)$, et en déduire $\mathbf{P}(R_2)$.

3. Soit un entier $n \in \mathbb{N}^*$. Justifier que :

$$\mathbf{P}(R_{n+1}) = \frac{2}{5}\mathbf{P}(R_n) + \frac{4}{5}\mathbf{P}(V_n)$$

et

$$\mathbf{P}(V_{n+1}) = \frac{3}{5}\mathbf{P}(R_n) + \frac{1}{5}\mathbf{P}(V_n).$$

4. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère la matrice colonne $X_n = \begin{pmatrix} \mathbf{P}(R_n) \\ \mathbf{P}(V_n) \end{pmatrix}$.

a. Déterminer une matrice $M \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $X_{n+1} = \dfrac{1}{5}MX_n$.

b. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $X_n = \dfrac{1}{5^{n-1}}M^{n-1}X_1$.

5. a. Démontrer que M est diagonalisable.

b. Déterminer une matrice inversible $P \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ et une matrice diagonale $D \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ telles que $M = PDP^{-1}$.

c. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $M^n = PD^nP^{-1}$.

6. En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, des expressions de $\mathbf{P}(R_n)$ et $\mathbf{P}(V_n)$ en fonction de n.

Exercice 11. On pose

$$M = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

1. **a.** Montrer par la méthode du pivot de Gauss que P est inversible et calculer P^{-1}.

   b. Vérifier que $M = PDP^{-1}$.

2. Un centre de vacances étudie le comportement d'un client qui a le choix chaque jour entre trois activités qui seront appelées **A**, **B** et **C**.

   On considère que si le jour n le client a choisi une activité, il en change systématiquement le lendemain et choisit de manière équiprobable entre les deux autres activités.

   Le premier jour (c'est-à-dire le jour 1), le client choisit l'activité **B**.

   Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note A_n (respectivement B_n et C_n) l'évènement « le client choisit l'activité **A** le jour n » (respectivement **B** et **C**) et on note a_n (respectivement b_n et c_n) sa probabilité.

   On définit également, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la matrice U_n par $U_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$. Ainsi, $U_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

   a. En utilisant la formule des probabilités totales, montrer que, pour tout entier naturel n non nul, $U_{n+1} = MU_n$.

   b. En utilisant la relation établie en **1.b.**, en déduire par récurrence que, pour tout entier naturel n non nul, $U_n = \frac{1}{3}PD^{n-1}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

   c. En déduire que, pour tout entier n non nul,

$$\begin{cases} a_n = c_n = \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{3}\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n-1} \\ b_n = \dfrac{1}{3} + \dfrac{2}{3}\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n-1} \end{cases}.$$

Exercice 12. On étudie une partie de la surface du fond de l'océan sur laquelle poussent uniquement deux algues : l'algue A et l'algue B. La quantité totale d'algues est supposée constante au cours du temps, égale à 1000 algues. On sait que, chaque année,

- 5% des algues A et 10% des algues B meurent ;
- la moitié des algues qui meurent sont remplacées par des algues A et l'autre moitié par des algues B.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note a_n le nombre d'algues A en vie à la fin de l'année n et b_n le nombre d'algues B en vie à la fin de l'année n.

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$$

   où $M = \begin{pmatrix} 0{,}975 & 0{,}05 \\ 0{,}025 & 0{,}95 \end{pmatrix}$.

2. Exprimer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$ en fonction de M, de n et de $\begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \end{pmatrix}$.
3. Démontrer que 1 est une valeur propre de M.
4. Montrer que M admet une autre valeur propre $\lambda \in [0\,;1[$.
5. En déduire que M est diagonalisable et déterminer une matrice D diagonale et une matrice P inversible telles que $M = PDP^{-1}$.
6. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = P^{-1}\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$. Établir, pour tout $n \in \mathbb{N}$, une relation entre $\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$, u_0, v_0, n et D.
7. En déduire que les suites (a_n) et (b_n) convergent. On note a_∞ et b_∞ leurs limites.
8. Vérifier que $\begin{pmatrix} a_\infty \\ b_\infty \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de M associé à la valeur propre 1.
9. Donner deux méthodes différentes pour calculer $a_\infty + b_\infty$.
10. En déduire que $u_0 = \dfrac{2000}{3}$.
11. Montrer que $a_\infty = \dfrac{2000}{3}$ et $b_\infty = \dfrac{1000}{3}$.

Exercice 13. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice vérifiant $A^2 = A$.

1. Soit λ une valeur propre de A et X un vecteur propre associé.
   - **a.** Exprimer A^2X en fonction de λ et X.
   - **b.** En déduire que $\lambda^2 = \lambda$.
   - **c.** Quelles sont les valeurs propres possibles pour λ ?
2. - **a.** Démontrer que $\ker(A - I_n) = \mathrm{Im}(A)$. On pourra procéder par double inclusion.
   - **b.** À l'aide du théorème du rang, en déduire que A est diagonalisable.

Exercice 14. Déterminer les matrices $M \in \mathscr{M}_n(K)$ diagonalisables telles que $\mathrm{Card}(\mathrm{Sp}(M)) = 1$.

Exercice 15. Soit f un endomorphisme d'un K-espace vectoriel de dimension finie et $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose que $0 \in \mathrm{Sp}(f^n)$. Montrer que $0 \in \mathrm{Sp}(f)$.