⧫ Chapitre 10. Variables aléatoires à densité

I. — Généralités

1) Définitions

Définition 1

Une **fonction de densité** (ou une **densité de probabilité**) est une fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que :

- f est positive ou nulle sur $\mathbb{R}$;
- f est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$;
- $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = 1$.

Exemple 2. Montrer que les fonctions suivantes sont des densités de probabilités.

1. $f : t \longmapsto \begin{cases} 4t^3 & \text{si } t \in [0\,;1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ **2.** $g : t \longmapsto \begin{cases} \dfrac{3}{t^4} & \text{si } t \geqslant 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ **3.** $h : t \longmapsto \dfrac{1}{\pi(t^2+1)}$.

Notation 3. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ dont les bornes (finies ou infinies) sont a et b. On note $\displaystyle\int_I f(t)\,\mathrm{d}t$ l'intégrale (éventuellement généralisée) $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$.

Définition 4

Soit X une variable aléatoire réelle. On dit que X est une **variable aléatoire à densité** s'il existe une densité de probabilité f telle que, pour tout intervalle I de $\mathbb{R}$,

$$\mathbf{P}(X \in I) = \int_I f(x)\,\mathrm{d}x.$$

On dit alors que f est une densité de probabilité de X ou que X admet f comme densité de probabilité.

Remarque 5. Comme une densité de probabilité f est positive, l'intégrale $\displaystyle\int_I f(t)\,\mathrm{d}t$ peut s'interpréter comme l'aire sous la courbe de f sur l'intervalle I.

Exemple 6. On reprend les fonctions f, g et h de l'exemple 2

1. Soit X une variable aléatoire admettant f comme densité. Calculer $\mathbf{P}\left(X \in \left]\frac{1}{3}\,;\frac{1}{2}\right]\right)$.
2. Soit Y une variable aléatoire admettant g comme densité. Calculer $\mathbf{P}(Y \geqslant 5)$.
3. Soit Z une variable aléatoire admettant h comme densité. Calculer $\mathbf{P}(Z \leqslant 1)$.

Propriété 7

Soit X une variable aléatoire admettant une densité f. Soit I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$.

1. tout $c \in I$, $\mathbf{P}(X = c) = 0$.
2. $\mathbf{P}(X \in I \cup J) = \mathbf{P}(X \in I) + \mathbf{P}(X \in J) - \mathbf{P}(X \in I \cap J)$ et, en particulier, si I et J sont disjoints, alors $\mathbf{P}(X \in I \cup J) = \mathbf{P}(X \in I) + \mathbf{P}(X \in J)$.
3. Si J est le complémentaire de I dans $\mathbb{R}$ alors $\mathbf{P}(X \in J) = 1 - \mathbf{P}(X \in I)$.
4. Si $\mathbf{P}(X \in I) \neq 0$ alors $\mathbf{P}_{(X \in I)}(X \in J) = \dfrac{\mathbf{P}(X \in I \cap J)}{\mathbf{P}(X \in I)}$. En particulier, si $J \subset I$ alors $\mathbf{P}_{(X \in I)}(X \in J) = \dfrac{\mathbf{P}(X \in J)}{\mathbf{P}(X \in I)}$ et si I et J sont disjoints alors $\mathbf{P}_{(X \in I)}(X \in J) = 0$.

Exemple 8.

1. Déterminer le réel λ tel que la fonction f définie par $f(t) = \dfrac{\lambda}{t^3}$ si $t \geqslant 1$ et $f(t) = 0$ sinon soit une densité de probabilité.
2. On suppose que X suit une loi de probabilité de densité f (pour cette valeur de λ). Calculer alors $\mathbf{P}(X \in [1\,;5[\cup [10\,;+\infty[)$, $\mathbf{P}_{(X \leqslant 3)}(X \in [1\,;5[\cup [10\,;+\infty[)$.

2) Fonction de répartition

Définition 9

Soit X une variable aléatoire admettant une densité de probabilité f. La **fonction de répartition** de X est la fonction F_X définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad F_X(t) = \mathbf{P}(X \leqslant t) = \int_{-\infty}^{t} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Exemple 10. Déterminer les fonctions de répartition des variables aléatoires X, Y et Z de l'exemple 6.

Propriété 11

Soit X une variable aléatoire admettant une densité de probabilité. Alors,

1. la fonction F_X est continue sur $\mathbb{R}$.
2. la fonction F_X est croissante sur $\mathbb{R}$.
3. $\lim\limits_{t \to -\infty} F_X(t) = 0$ et $\lim\limits_{t \to +\infty} F_X(t) = 1$.

Propriété 12

Soit X une variable aléatoire de densité f. Alors, F_X est dérivable sauf éventuellement sur un ensemble fini E et, pour tout $t \notin E$, $F'_X(t) = f(t)$. Inversement, si F'_X coïncide avec une fonction g sauf, éventuellement, en nombre fini de valeurs alors g est une densité de X.

Exemple 13. On considère la variable aléatoire Y de l'exemple 6. On admet que $S = 3Y + 2$ et $T = Y^2$ sont des variables aléatoires à densité. Déterminer une densité pour chacune d'elles.

3) Espérance, variance et écart-type

Définition 14

Soit X une variable aléatoire admettant densité f. Si l'intégrale $\int_{\mathbb{R}} |t|\, f(t)\,\mathrm{d}t$ converge, on dit que X admet une **espérance** $\mathbf{E}(X)$ et celle-ci est définie par

$$\mathbf{E}(X) = -\int_{-\infty}^{0} (-t)f(t)\,\mathrm{d}t + \int_{0}^{+\infty} tf(t)\,\mathrm{d}t.$$

Remarque 15.

1. Le découpage en deux intégrales est nécessaire pour se ramener à des fonctions positives.
2. Si f est nulle sur $\mathbb{R}_-$ alors X admet une espérance si et seulement si $\int_{0}^{+\infty} tf(t)\,\mathrm{d}t$ converge et, dans ce cas, $\mathbf{E}(X) = \int_{0}^{+\infty} tf(t)\,\mathrm{d}t$.

Exemple 16. Déterminer si les variables aléatoires de l'exemple 6 admettent des espérances et les calculer le cas échéant.

Propriété 17

Soit X une variable aléatoire à densité admettant une espérance.

1. Si X est à valeurs positives alors $\mathbf{E}(X) \geqslant 0$ (*positivité de l'espérance*).
2. Si a et b sont deux réels alors $\mathbf{E}(aX+b) = a\mathbf{E}(X) + b$ (*linéarité de l'espérance*).

Exemple 18. Déterminer l'espérance de la variable aléatoire S de l'exemple 13.

Théorème 19. — Théorème de transfert

Soit X une variable aléatoire admettant une densité f. Soit $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+$ une fonction continue sur $\mathbb{R}$ alors $\varphi(X)$ est une variable aléatoire à densité et elle admet une espérance si et seulement si l'intégrale $\int_{\mathbb{R}} \varphi(t)f(t)\,\mathrm{d}t$ converge. De plus, dans ce cas,

$$\mathbf{E}(X) = \int_{\mathbb{R}} \varphi(t)f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Exemple 20. Déterminer si la variable aléatoire T de l'exemple 13 admet une espérance et, si oui, calculer celle-ci.

Définition 21

Soit X une variable aléatoire de densité f admettant une espérance.

1. Si $(X - \mathbf{E}(X))^2$ admet une espérance alors on dit que X admet une **variance** $\mathbf{V}(X)$ définie par
$$\mathbf{V}(X) = \mathbf{E}((X-\mathbf{E}(X))^2) = \int_{\mathbb{R}} (t - \mathbf{E}(X))^2 f(t)\,\mathrm{d}t.$$
2. Si X admet une variance, on définit l'**écart-type** de X, noté $\sigma(X)$, par $\sigma(X) = \sqrt{X}$.

Propriété 22. — Formule de König-Huygens

Soit X une variable aléatoire de densité f admettant une espérance. Alors, X admet une variance si et seulement si X^2 admet une espérance et alors

$$\mathbf{V}(X) = \mathbf{E}(X^2) - \mathbf{E}(X)^2.$$

Exemple 23. Montrer que la variable aléatoire Y de l'exemple 6 admet une variance et calculer celle-ci.

Propriété 24

Soit X une variable à densité admettant une variance. Alors, pour tous réels a et b, $aX + b$ admet une variance et

$$\mathbf{V}(aX + b) = a^2\mathbf{V}(X).$$

4) Variables aléatoires à densité indépendantes

Définition 25

Soit X et Y deux variables aléatoires à densité. On dit que X et Y sont **indépendantes** si, pour tous intervalles I et J de $\mathbb{R}$, $\mathbf{P}((X \in I) \cap (Y \in J)) = \mathbf{P}(X \in I)\mathbf{P}(Y \in J)$.

Propriété 26

Soit X et Y deux variables aléatoires à densité. On suppose que $X + Y$ et XY sont des variables aléatoires à densités.

1. $\mathbf{E}(X + Y) = \mathbf{E}(X) + \mathbf{E}(Y)$ (*linéarité de l'espérance*).
2. Si X et Y sont indépendantes, $\mathbf{E}(XY) = \mathbf{E}(X)\mathbf{E}(Y)$ et $\mathbf{V}(X + Y) = \mathbf{V}(X) + \mathbf{V}(Y)$.

II. — Lois usuelles

1) Lois uniformes

Définition 27

Soit a et b deux réels tels que $a < b$. On dit qu'une variable aléatoire X suit une **loi uniforme** sur $[a\,;b]$ si X admet pour densité la fonction $f : t \longmapsto \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & \text{si } t \in [a\,;b] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

Dans ce cas, on note $X \hookrightarrow \mathscr{U}([a\,;b])$.

Exemple 28. On considère une variable aléatoire X suivant une loi $\mathscr{U}([2\,;5])$.

1. Tracer la courbe représentative de la densité f de X.
2. Déterminer la fonction de répartition de f.
3. Calculer $\mathbf{P}(X \leqslant 3)$ et déterminer l'espérance et la variance de X.

Remarque 29. La loi uniforme sert à modéliser un choix au hasard dans un intervalle. Par exemple, si on choisit un réel au hasard entre 0 et 1, on modélisera ce choix par une loi uniforme sur $[0\,;1]$.

Propriété 30

Soit a et b deux réels tels que $a < b$. Soit X une variable aléatoire suivant une loi $\mathscr{U}([a\,;b])$. Alors, X admet une espérance et $\mathbf{E}(X) = \dfrac{a+b}{2}$.

Exemple 31. Le temps d'attente en minutes à un guichet est modélisé par une variable aléatoire X suivant un loi uniforme sur $[0\,;30]$.

1. Un client se présente au guichet. Quelle est la probabilité qu'il attende au moins 10 minutes.
2. Sachant qu'au bout de 10 minutes, le client n'a toujours pas été servi, quelle est la probabilité qu'il attende au moins 10 minutes supplémentaires ?
3. Quelle est le temps d'attente moyen à ce guichet ?

2) Lois exponentielles

Dans tout ce paragraphe, λ désigne un réel strictement positif.

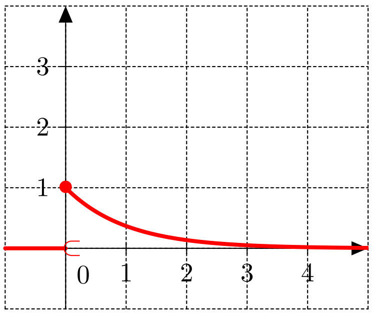
Propriété 32

La fonction $f_\lambda : t \longmapsto \begin{cases} \lambda \mathrm{e}^{-\lambda t} & \text{si } t \geqslant 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ est une densité de probabilité

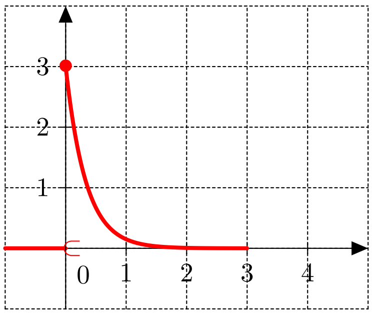
Définition 33

On dit qu'une variable aléatoire suit une **loi exponentielle** de paramètre λ si elle admet la fonction f_λ comme densité de probabilité. Dans ce cas, on note $X \hookrightarrow \mathscr{E}(\lambda)$.

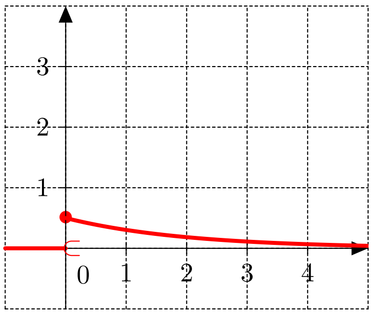
Remarque 34. — Le paramètre λ est égal à $f_\lambda(0)$. Ceci peut permettre de déterminer ou d'estimer λ graphiquement ou par le calcul lorsque ce paramètre est inconnu.



$\lambda = \dots$



$\lambda = \dots$



$\lambda = \dots$

Remarque 35. La loi exponentielle est utilisée pour modéliser des temps d'attente, des durées de vie ou des durées de fonctionnement avant la première panne.

Théorème 36

Si X suit une loi exponentielle de paramètre λ alors l'espérance de X est $\mathbf{E}(X) = \dfrac{1}{\lambda}$.

Exemple 37. La durée de vie X (en heures) d'un composant électronique est modélisée par la loi exponentielle de paramètre $\lambda = 0{,}0006$. On choisit un composant au hasard.

1. Quelle est la probabilité que ce composant ait une durée de vie inférieure à 1000 heures ?
2. Quelle est la probabilité que ce composant soit encore en état de marche au bout de 500 heures ?
3. Déterminer la probabilité que le composant fonctionne encore au bout de 2000 heures sachant qu'il a déjà fonctionné pendant 1500 heures.
4. Déterminer la durée de vie moyenne du composant électronique.

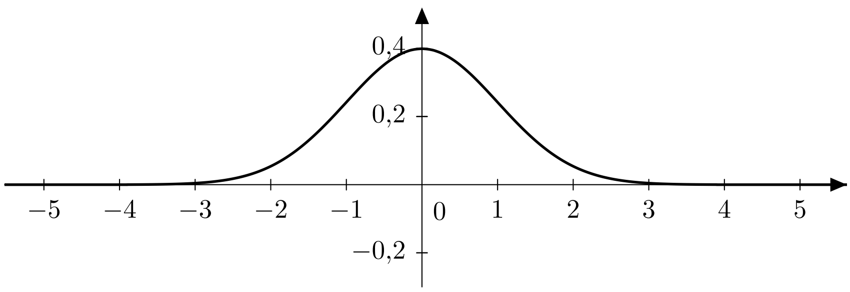
3) Lois normales

a) Loi normale centrée réduite

Théorème 38. — (admis)

La fonction $f : t \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}$ est une densité de probabilité.

La courbe de la fonction f est la courbe suivante appelée courbe gaussienne ou courbe en « cloche ». La fonction f étant paire, la courbe de f est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.



Définition 39

On dit qu'une variable aléatoire X suit une **loi normale centrée réduite** si la densité de X est la fonction f du théorème précédent. Dans ce cas, on note $X \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$.

Propriété 40

Si $X \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$ alors $\mathbf{P}(X \leqslant 0) = \mathbf{P}(X \geqslant 0) = \dfrac{1}{2}$.

Propriété 41

Si $X \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$ alors X admet une espérance et une variance et $\mathbf{E}(X) = 0$ et $\sigma(X) = 1$.

Remarque 42. Cette proposition justifie le nom de la loi $\mathcal{N}(0,1)$. Elle est « centrée » car sa moyenne est nulle et elle est « réduite » car son écart-type vaut 1.

b) Loi normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$

Dans tout ce paragraphe, μ est un réel quelconque et σ est un réel strictement positif.

Propriété 43

La fonction $f_{\mu,\sigma} : t \longmapsto \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}}$ est une densité de probabilité sur $\mathbb{R}$.

Remarque 44. La fonction $f_{0,1}$ est la fonction f du théorème 38

Définition 45

On dit qu'une variable aléatoire X suit une **loi normale** de paramètres μ et σ^2 si la densité de X est la fonction $f_{\mu,\sigma}$ de la propriété précédente. Dans ce cas, on note $X \hookrightarrow \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$.

Remarque 46. La loi normale centrée réduite est la loi normale de paramètres 0 et 1.

Propriété 47

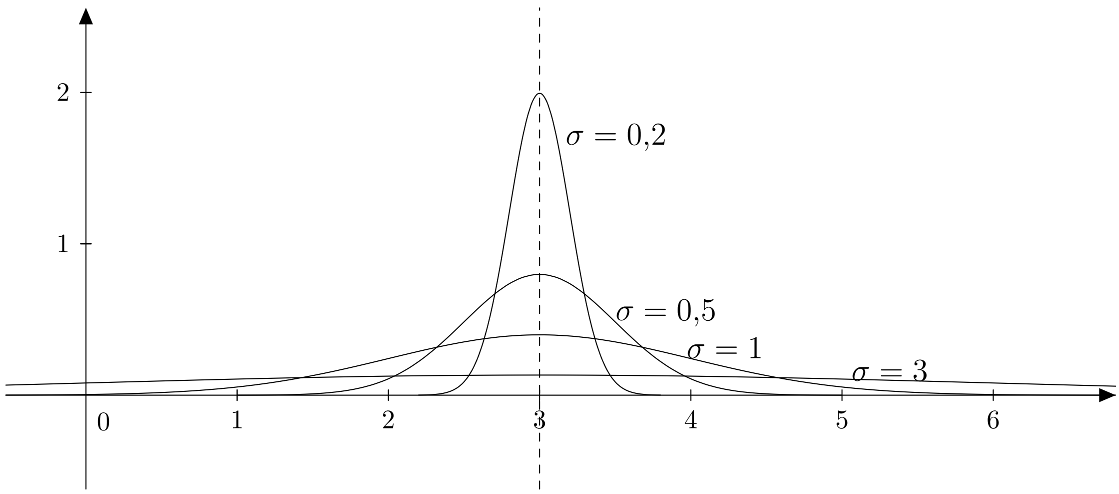
Une variable aléatoire X suit une loi normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ si et seulement si la variable aléatoire Y définie par $Y = \dfrac{X - \mu}{\sigma}$ suit une loi $\mathcal{N}(0, 1)$.

Corollaire 48

Soit X une variable aléatoire suivant une loi $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$. Alors, X admet une espérance et une variance et

$$\mathbf{E}(X) = \mu \qquad \text{et} \qquad \mathbf{V}(X) = \sigma^2.$$

Remarque 49. L'écart-type d'une variable aléatoire traduisant la dispersion des valeurs autour de l'espérance, plus σ est grand, plus la courbe est « étalée » et plus σ est petit, plus la courbe est « resserrée » autour de μ.



Remarque 50. Pour la même raison de symétrie de la courbe, si X suit une loi $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ alors $P(X \leqslant \mu) = P(X \geqslant \mu) = \frac{1}{2}$.

Remarque 51. En raison d'un théorème que nous verrons en fin d'année, les lois normales apparaissent comme « lois limites » lors de la répétition d'un grand nombre d'expériences identiques et indépendantes. Ceci explique qu'on les rencontrent fréquemment dans la vie courante (distribution des tailles dans une population, par exemple).

III. — Exercices

Exercice 1. Soit $C \in \mathbb{R}$ et $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{C\ln(1+x)}{(x+1)^2} & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}.$$

1. Déterminer C pour que f soit une densité de probabilité sur $\mathbb{R}$. On utilisera une intégration par parties.
2. Soit X une variable aléatoire réelle de densité f. Déterminer la fonction de répartition F de X.
3. Calculer $\mathbf{P}(X \leqslant 5)$, $\mathbf{P}(X \in]0\,;2[)$, $\mathbf{P}(X \leqslant 0)$ et, pour tout réel a fixé, $\mathbf{P}(X = a)$.

Exercice 2. Soit $c \in \mathbb{R}$. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ pour tout réel x par :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{c}{(1+x)^2} & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

1. Donner une condition nécessaire et suffisante sur c pour que f soit une densité de probabilité.

   On suppose cette condition satisfaite dans la suite de l'exercice et on considère une variable aléatoire X admettant f comme densité.
2. Déterminer la fonction de répartition de X.
3. Montrer que X admet une espérance et la calculer.

   Indication. On utilisera le fait que, pour tout réel x, $2x = 2x + 2 - 2$ et on utilisera la linéarité de l'intégrale.
4. On cherche dans cette question à déterminer la variance de X.
   - **a.** Déterminer $\mathbf{E}((X+1)^2)$, $\mathbf{E}(2X)$ et $\mathbf{E}(1)$.
   - **b.** En déduire $\mathbf{E}(X^2)$.
   - **c.** Déterminer alors la valeur de $\mathbf{V}(X)$.

Exercice 3. Soit un réel $a > 0$. On considère la fonction f définie pour tout réel x par :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{a}x^{-\frac{a+1}{a}} & \text{si } x \geqslant 1 \\ 0 & \text{si } x < 1 \end{cases}.$$

1. Montrer que f est une densité de probabilité

   On considère une variable aléatoire X admettant f comme densité.
2. Déterminer la fonction de répartition de X.
3. Déterminer les valeurs de a pour lesquelles X a une espérance, puis calculer alors $\mathbf{E}(X)$.

Exercice 4. Soit X une variable aléatoire de densité f définie, pour tout réel x, par :

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ x\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}.$$

1. Vérifier que f est une densité de probabilité.

2. Déterminer la fonction de répartition de X.
3. On va montrer dans cette question que X admet une espérance. On admettra pour cela que $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\, \mathrm{d}x = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$.
   a. Soit $x \geqslant 0$. En utilisant une intégration par parties, montrer que :
$$\int_0^x t^2 \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\, \mathrm{d}t = \int_0^x \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\, \mathrm{d}t - x\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}.$$
   b. En déduire l'existence et la valeur de $\mathbf{E}(X)$.
4. Notons $Y = X^2$. On veut montrer que Y suit une loi exponentielle dont on précisera le paramètre.
   a. Déterminer la fonction de répartition de Y, en utilisant l'expression de la fonction de répartition de X trouvée à la question **2.**.
   b. Dériver la fonction de répartition de Y, puis conclure.

Exercice 5. On choisit au hasard un nombre réel dans $[0\,;10]$ et on note X la variable aléatoire égale au nombre choisi.

1. Quelle est la loi de probabilité de X ?
2. Déterminer la fonction de répartition de X.
3. Quelle est la probabilité que le nombre choisi soit inférieur ou égal à 3 ?
4. Quelle est la probabilité que le nombre choisi soit un entier naturel ?
5. Quelle est la probabilité que le nombre choisi soit strictement supérieur à sa racine carrée ?
6. Quelle est la probabilité que le nombre choisi soit solution de l'inéquation $x^2-10x+21 \leqslant 0$?

Exercice 6. Dans cet exercice, on arrondira les probabilités au millième. Une usine fabrique des machines à laver. La durée de vie de chaque machine (comptée en années à partir de sa fabrication) est une variable aléatoire D qui suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$.

1. On observe qu'au bout de 4 ans, environ 67% des machines fonctionnent encore. Déterminer la valeur de λ.
2. Quelle est la durée de vie moyenne d'une machine produite par cette usine ?
3. Calculer la probabilité qu'une machine fonctionne encore au bout de 10 ans.
4. Paul a acheté une machine il y a 3 ans, et elle fonctionne encore. Quelle est la probabilité que dans 10 ans elle fonctionne encore ? Que remarque-t-on ? Interpréter.

Exercice 7. Dans tout cet exercice, les probabilités seront arrondies au centième.

1. La durée de vie, exprimée en années, d'un composant électronique est une variable aléatoire X qui suit une loi exponentielle de paramètre λ, où λ est un réel strictement positif. On sait que la probabilité que la durée de vie de ce composant soit inférieure à 3 ans est 0,26. Déterminer la valeur exacte du réel λ.
   Dans la suite de l'exercice, on prendre $\lambda = 0{,}1$.
2. Calculer l'espérance de la variable aléatoire X et donner une interprétation de ce résultat.
3. Soit un réel $a > 0$. Déterminer $\mathbf{P}(X \geqslant a)$.
4. Le composant est encore en état de fonctionnement au bout de 4 ans. Quelle est la probabilité pour qu'il fonctionne encore au moins 3 années supplémentaires ?
5. Un grand nombre de composants identiques sont mis en fonctionnement en même temps. Après combien d'années complètes de fonctionnement peut-on estimer qu'au moins trois quarts de ces composants seront en panne ?

Exercice 8. Une entreprise d'autocars dessert une région montagneuse. En chemin, les véhicules peuvent être bloqués par des incidents extérieurs comme des chutes de pierres, la présence de troupeaux sur la route, etc. Un autocar part de son entrepôt. On note D la variable aléatoire qui mesure la distance en kilomètres que l'autocar va parcourir jusqu'à ce qu'il survienne un incident. On admet que D suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda = \frac{1}{82}$. Dans tout l'exercice, les résultats numériques seront arrondis au millième.

1. Calculer la probabilité que la distance parcourue sans incident soit :

a. comprise entre 50 et 100 km ;

b. supérieure à 300 km.

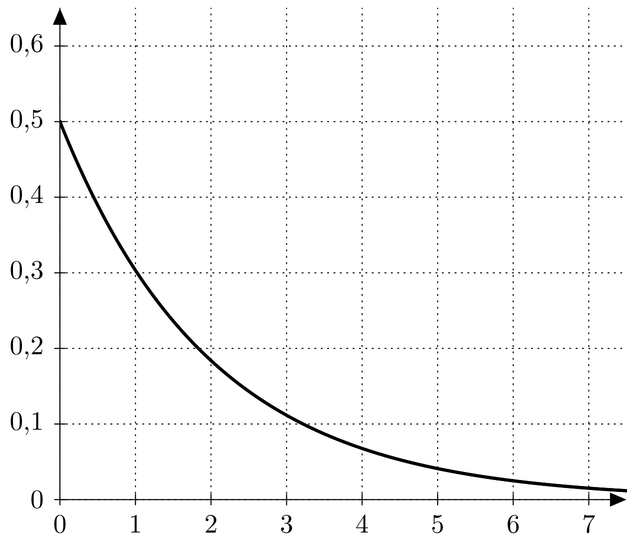
2. Déterminer la distance moyenne parcourue sans incident.

3. L'entreprise possède N_0 autocars. Les distances parcourues par chacun des autocars entre l'entrepôt et le lieu où survient un incident sont des variables aléatoires deux à deux indépendantes et de même loi exponentielle de paramètre $\lambda = \frac{1}{82}$. Si d est un réel positif, on note X_d la variable aléatoire égale au nombre d'autocars n'ayant subi aucun incident après avoir parcouru d kilomètres.

a. Montrer que X_d suit une loi binomiale de paramètres N_0 et $\mathrm{e}^{-\lambda d}$.

b. Donner le nombre moyen d'autocars n'ayant subi aucun incident après avoir parcouru d kilomètres.

Exercice 9. La durée de vie, exprimée en années, d'un composant électronique peut être modélisée par une variable aléatoire notée X suivant la loi exponentielle de paramètre λ avec $\lambda > 0$. La courbe de f, la fonction densité associée, est représentée ci-contre.



1. En expliquant sa démarche, déterminer graphiquement, à 0,1 près,

a. la valeur de λ ;

b. la probabilité que la durée de vie du composant soit inférieure à 1 an.

2. On suppose que $\mathbf{E}(X) = 2$.

a. Interpréter, dans le cadre de l'exercice, la valeur de $\mathbf{E}(X)$.

b. Calculer la valeur de λ.

c. Calculer $P(X \leqslant 2)$. On donnera la valeur exacte puis une valeur arrondie à 0,01 près. Interpréter ce résultat.

3. Un circuit électronique est composé de deux composants identiques numérotés 1 et 2. On suppose que les durées de vie D_1 et D_2 des deux composants sont des variables aléatoires indépendantes. Deux montages possibles sont envisagés.

a. Lorsque les deux composants sont montés « en parallèle », le circuit A est défaillant uniquement si les deux composants sont défaillants en même temps. Calculer, arrondie à 10^{-2} près, la probabilité que le circuit A soit défaillant avant deux ans.

b. Lorsque les deux composants sont montés « en série », le circuit B est défaillant dès que l'un au moins des deux composants est défaillant. Calculer, arrondie à 10^{-2} près, la probabilité que le circuit B soit défaillant avant deux ans.

Exercice 10. Soit a un réel strictement positif.

1. Si U est une variable suivant la loi uniforme $\mathscr{U}(]0,1[)$, prouver que $X = -\dfrac{1}{a}\ln(1-U)$ est une variable à densité qui suit la loi exponentielle de paramètre a.

2. Compléter la fonction ci-dessous, écrite en Python, qui prend en entrée a et qui retourne une simulation d'une variable exponentielle de paramètre a.

```python
from math import log
from random import random
def varexpo(a):
  U=random()
  X= ......................
  return ...................
```

Exercice 11. Soit X une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite. On note F sa fonction de répartition. On donne $F(0{,}5) \approx 0{,}691$, $F(1) \approx 0{,}841$, $F(1{,}5) \approx 0,933$, $F(2) \approx 0{,}977$.

Déterminer des valeurs approchées à 10^{-3} près des probabilités suivantes :

$\mathbf{P}(X<0)$	$\mathbf{P}(X<1)$	$\mathbf{P}(X \leqslant -1{,}5)$	$\mathbf{P}(0{,}5 \leqslant X \leqslant 1)$
$\mathbf{P}(-2 \leqslant X < 1)$	$\mathbf{P}(X \geqslant -1)$	$\mathbf{P}(-0{,}5 < X < 1{,}5)$	$\mathbf{P}(-2 \leqslant X \leqslant -1)$

Exercice 12. Soit une variable $Z \hookrightarrow \mathscr{N}(0,1)$ et F_Z sa fonction de répartition.

1. Justifier par un argument graphique que $F_Z(-x) = 1 - F_Z(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

2. En déduire une valeur approchée de $\mathbf{P}(Z \leqslant -2)$.
On se servira des données contenues dans l'énoncé de l'exercice précédent.

3. Soit X une variable suivant la loi normale de paramètres $\mu = 10$ et $\sigma = 4$. Déterminer une valeur approchée de $\mathbf{P}(X \leqslant 2)$.

Exercice 13. On considère deux variables aléatoires indépendantes $X \hookrightarrow \mathscr{B}(\frac{1}{3})$ et $V \hookrightarrow \mathscr{E}(3)$.

1. On pose $U = 2X - 1$. Déterminer la loi de U ainsi que son espérance et sa variance.

2. On pose $W = UV$.

a. Soit $x \geqslant 0$. Calculer $\mathbf{P}_{(U=1)}(W \leqslant x)$ et $P_{(U=-1)}(W \leqslant x)$ puis en déduire $P(W \leqslant x)$.

b. Calculer $F_W(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

c. En déduire une densité de W.

3. Calculer $\mathbf{E}(W)$.

Exercice 14. Soit U et V deux variables aléatoires indépendantes suivant toutes les deux la loi uniforme sur $[0,1]$. On définit la variable $M = \max(U,V)$.

1. Rappeler les fonctions de répartition F_U et F_V.

2. Démontrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $F_M(x) = F_U(x)F_V(x)$.

3. En déduire une densité de M.