

# ◆ TP8 – Simulation de variables aléatoires par inversion de la fonction de répartition

On rappelle que le module `random` comporte la fonction `random()` qui renvoie un nombre flottant au hasard appartenant à l'intervalle  $[0 ; 1[$ . Dans toute la suite, on suppose que ce module a été importé.

## I. — Principe de la méthode

Dans le TP7, nous avons vu comment simuler certaines variables aléatoires à partir d'une fonction simulant une variable de Bernoulli. Cela a été possible car, dans chaque cas (loi binomiale et loi géométrique), on savait interpréter les variables aléatoires dans le cadre d'un schéma de Bernoulli (nombre de succès et rang du premier succès). Cependant, ce n'est pas toujours le cas. Par exemple, nous n'avons pas d'interprétation simple de la loi de Poisson.

Nous allons voir dans ce TP comment simuler une variable aléatoire uniquement à partir de sa loi en utilisant la fonction de répartition.

### 1) Un premier exemple

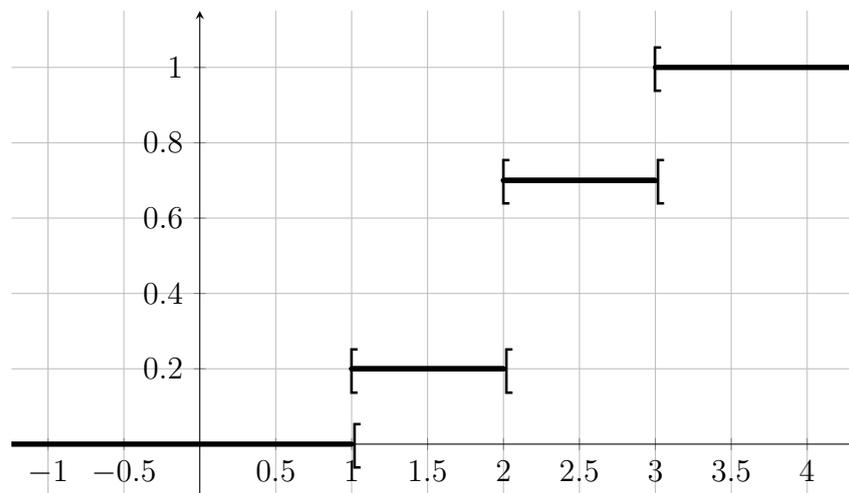
Considérons une variable aléatoire  $X$  telle que  $X(\Omega) = \{1, 2, 3\}$  et

$$\mathbf{P}(X = 1) = 0,2 \quad \mathbf{P}(X = 2) = 0,5 \quad \mathbf{P}(X = 3) = 0,3.$$

La fonction de répartition de  $X$  est définie par

$$\forall t \in \mathbb{R}, F_X(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 1 \\ 0,2 & \text{si } 1 \leq t < 2 \\ 0,7 & \text{si } 2 \leq t < 3 \\ 1 & \text{si } t \geq 3 \end{cases}$$

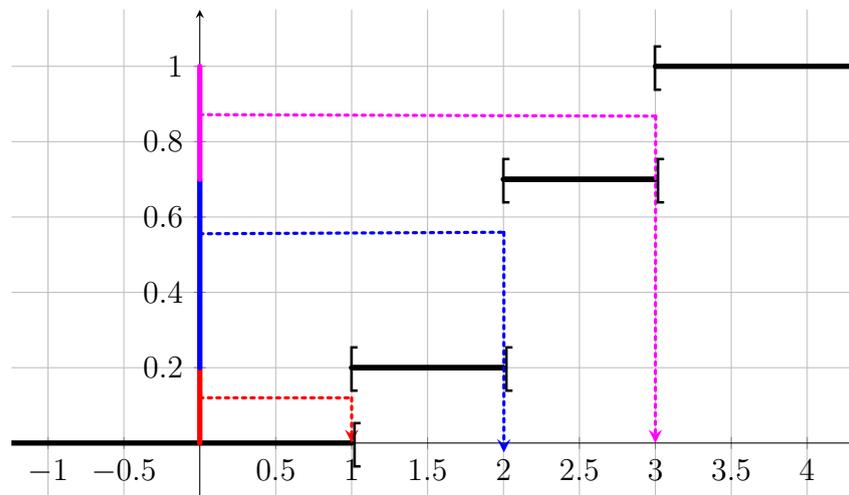
Sa représentation graphique est donc la suivante :



Ainsi, sur l'axe des ordonnées, la courbe de  $F_X$  partage l'intervalle  $[0 ; 1]$  en trois intervalles :  $[0 ; 0,2[$ ,  $[0,2 ; 0,7[$  et  $[0,7 ; 1]$ . Les longueurs de ces intervalles, à savoir 0,2, 0,5 et 0,3 correspondent

exactement aux probabilités  $\mathbf{P}(X = 1) = 0,2$ ,  $\mathbf{P}(X = 2) = 0,5$  et  $\mathbf{P}(X = 3) = 0,3$  par propriété de la fonction de répartition.

Ainsi, par lecture inverse de la fonction de répartition, on peut associer à chaque nombre de l'intervalle  $[0; 1]$  une des valeurs 1, 2 ou 3.



L'idée pour simuler la variable aléatoire  $X$  est de choisir un nombre aléatoire entre 0 et 1 puis, selon que ce nombre appartient à  $[0; 0,2[$ ,  $[0,2; 0,7[$  ou  $[0,7; 1]$ , renvoyer la valeur 1, 2 ou 3. On obtient donc la fonction suivante.

```
def simulX():
    prob = random()
    if prob < 0.2:
        return 1
    elif prob < 0.7:
        return 2
    else:
        return 3
```

## 2) Un second exemple

On considère une variable aléatoire  $Y$  telle que  $Y(\Omega) = \{1, 2, 3, 4, 5\}$  et

$$\mathbf{P}(Y = 1) = 0,4 \quad \mathbf{P}(Y = 2) = \mathbf{P}(Y = 5) = 0,2 \quad \mathbf{P}(Y = 3) = \mathbf{P}(Y = 4) = 0,1.$$

**Question 1.** Tracer la courbe de la fonction de répartition de  $Y$ .

Quels sont les 5 intervalles que l'on va considérer dans cette situation ?

**Question 2.** Écrire une fonction `simulY` qui simule la variable aléatoire  $Y$ .

**Question 3.** Calculer (à la main) l'espérance de  $Y$ . En utilisant les fonctions implémentées lors du TP7, estimer l'espérance de la variable simulée par la fonction `simulY` et comparer le résultat avec  $\mathbf{E}(Y)$ .

## 3) Principe général pour une variable aléatoire discrète

Le principe général de la méthode d'inversion de la fonction de répartition pour une variable discrète  $X$  prenant les valeurs  $x_0, x_1, x_2, \dots$  est donc de partager l'intervalle  $[0; 1]$  en différents intervalles  $[0; F_X(x_0)[$ ,  $[F_X(x_0); F_X(x_1)[$ ,  $[F_X(x_1); F_X(x_2)[$ , ... puis de choisir un nombre réel

aléatoire  $p$  entre 0 et 1 et de renvoyer l'unique nombre  $x_k$  tel que  $p \in [F_X(x_{k-1}); F_X(x_k)[$  (avec la convention  $F_X(x_{-1}) = 0$ ).

Ce principe peut s'appliquer aussi bien pour des variables à support fini que pour des variables à support infini. Cependant, lorsque le nombre de valeurs prises par la variable devient grand (ou qu'il est variable), il n'est plus pertinent de programmer comme ci-dessus avec une succession d'instructions conditionnelles.

Nous allons voir sur divers exemples comment on peut s'y prendre dans ce cas.

## II. — Simulation d'une variable suivant une loi binomiale ou une loi géométrique

### 1) Loi binomiale

Considérons une variable aléatoire  $X$  suivant une loi binomiale de paramètres  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $p \in ]0; 1[$ .

Pour implémenter la méthode d'inversion de la fonction de répartition  $F_X$ , nous allons avoir besoin de connaître les valeurs prises par cette fonction. Pour cela, on peut construire une liste contenant ces valeurs.

**Question 4.** Écrire une fonction `factorielle` qui prend en argument un entier naturel  $n$  et qui renvoie la valeur de la factorielle de  $n$ . On vérifiera que `factorielle(0)` renvoie 1 et que `factorielle(7)` renvoie 5040.

**Question 5.** En utilisant la fonction `factorielle`, écrire une fonction `coeff_binom` qui prend en argument un entier naturel  $n$  et un entier naturel  $k$  compris entre 0 et  $n$  et qui renvoie la valeur du coefficient binomial  $\binom{n}{k}$ . On vérifiera que `coeff_binom(6,3)` renvoie 20 et que `coeff_binom(50,12)` renvoie 121399651100.

**Question 6.** Écrire une fonction `loi_binomiale` qui prend en argument un entier naturel  $n$ , un réel  $p$  compris entre 0 et 1 et un entier  $j$  compris entre 0 et  $n$  et qui renvoie la valeur de  $\mathbf{P}(X = j)$  où  $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$ . On vérifiera que `loi_binomiale(6,0.3,2)` renvoie (approximativement) 0.324135.

**Question 7.** Soit  $k$  un entier compris entre 0 et  $n$ . Que vaut  $F_X(0)$ ? Et si  $k > 0$ , comment peut-on calculer  $F_X(k)$  à partir de  $F_X(k-1)$ ?

**Question 8.** Écrire une fonction `fonc_rep_binomiale` prenant arguments un entier naturel  $n$  et un réel  $p$  compris entre 0 et 1 et qui renvoie la liste des valeurs de la fonction de répartition de  $X$ . Ainsi, si la liste renvoyée est  $L$  alors, pour tout entier  $k$  compris entre 0 et  $n$ ,  $L[k]$  devra être égal à  $F_X(k)$ . On aura intérêt à utiliser la question précédente. On vérifiera que `fonc_rep_binomiale(5,0.2)` renvoie (approximativement) [0.32768, 0.73728, 0.94208, 0.99328, 0.99968, 1].

**Question 9.** Compléter le script de la fonction suivante de telle sorte qu'elle simule  $X$ .

```
def simul_binomiale(n,p):
    L = ...
    prob = random()
    k = ...
    while prob ...:
        k += ...
    return ...
```

**Question 10.** On souhaite écrire une fonction `freq_binomiale` qui permet de déterminer la fréquence d'un entier  $j$  obtenus lorsqu'on effectue  $N$  simulations d'une variable  $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$ . Lequel des deux scripts suivants est préférable? On expliquera son choix.

```
def freq_binomiale(n, p, j, N):
    c = 0
    for i in range(N):
        if simul_binomiale(n, p) == j:
            c += 1
    return c/N
```

```
def freq_binomiale(n, p, j, N):
    L = fonc_rep_binomiale(n, p)
    c = 0
    for i in range(N):
        prob = random()
        k = 0
        while prob >= L[k]:
            k += 1
        if j == k:
            c += 1
    return c/N
```

**Question 11.** Comparer, pour quelques valeurs de  $n$ ,  $p$  et  $j$  de votre choix, les valeurs renvoyées par `freq_binomiale(n, p, j, 10000)` et `loi_binomiale(n, p, j)`.

## 2) Loi géométrique

Dans le cas particulier d'une loi géométrique, il est possible de calculer explicitement les valeurs de la fonction de répartition, ce que nous allons exploiter.

On suppose ici que  $X$  est une variable aléatoire suivant une loi géométrique de paramètre  $p \in ]0; 1[$ . On note  $F_X$  sa fonction de répartition.

**Question 12.** Montrer que, pour tout  $k \in \mathbb{N}$ ,  $F_X(k) = 1 - (1 - p)^k$ .

**Question 13.** En utilisant la question précédente et adaptant la fonction `simul_binomiale`, écrire une fonction `simul_geo` qui prend en argument un réel  $p$  compris entre 0 et 1 et qui simule  $X$  par la méthode d'inversion de la fonction de répartition.

**Question 14.** Écrire une fonction `freq_geo` qui prend en argument un réel  $p$  strictement compris entre 0 et 1, un entier naturel non nul  $j$  et un entier naturel non nul  $N$  et qui renvoie la fréquence de  $j$  obtenus lorsqu'on effectue  $N$  simulations d'une variable  $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$  à l'aide de la fonction `simul_geo`.

**Question 15.** Comparer, pour quelques valeurs de  $p$  et  $j$  de votre choix, les valeurs renvoyées par `freq_geo(p, j, 10000)` et la probabilité  $\mathbf{P}(X = j)$ .

**Question 16.** Soit  $t$  un réel compris entre 0 et 1. Démontrer que, pour tout entier naturel  $k \geq 1$ ,

$$F_X(k-1) \leq t < F_X(k) \iff k \leq \frac{\ln(1-t)}{\ln(1-p)} + 1 < k+1$$

**Question 17.** En utilisant la fonction `int`, déduire de la question précédente une fonction `simul_geo_bis` qui prend en argument un réel  $p$  strictement compris entre 0 et 1 et qui simule  $X$  par la méthode d'inversion de la fonction de répartition sans utiliser de boucle (ni `while` ni `for`). On rappelle qu'en Python, le logarithme népérien s'obtient grâce à la fonction `log` du module `math`.

**Question 18.** Reprendre les questions 14 et 15 en remplaçant la fonction `simul_geo` par la fonction `simul_geo_bis`.

### III. — Simulation d'une variable suivant une loi de Poisson

**Question 19.** Écrire une fonction `loi_Poisson` qui prend en argument un réel `lamb` et un entier naturel `j` et qui renvoie la valeur de  $\mathbf{P}(X = j)$  où  $X$  suit une loi  $\mathcal{P}(\mathbf{lamb})$ . On utilisera la fonction factorielle. On rappelle qu'en Python la fonction exponentielle s'obtient grâce à la fonction `exp` du module `math`. On vérifiera que `loi_Poisson(2,3)` renvoie `0.1804470443154836`.

*Remarque.* En Python, `lambda` est un mot-clé (comme `return` ou `def` ou `for`) qui ne peut pas être utilisé comme nom de variable. Ceci explique pourquoi nous avons appelé le paramètre `lamb` dans la fonction précédente.

**Question 20.** Soit  $X$  une variable aléatoire suivant une loi de Poisson de paramètre  $\lambda$ . Démontrer que, pour tout entier naturel  $k$ ,

$$\mathbf{P}(X = k + 1) = \frac{\lambda}{k + 1} \mathbf{P}(X = k).$$

**Question 21.** Compléter le script de la fonction suivante afin qu'elle simule une variable aléatoire  $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$  sans utiliser la fonction factorielle ni la fonction `loi_Poisson`.

```
from math import exp

def simul_Poisson(lamb):
    prob = random()
    k = ...
    p = ...
    F = ...
    while prob ...:
        p = ...
        F += ...
        k += ...
    return ...
```

**Question 22.** Écrire une fonction `freq_Poisson` qui prend en argument un réel `lamb` strictement positif, un entier naturel `j` et un entier naturel non nul `N` et qui renvoie la fréquence de `j` obtenus lorsqu'on effectue `N` simulations d'une variable  $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\mathbf{lamb})$  à l'aide de la fonction `simul_Poisson`.

**Question 23.** Comparer, pour quelques valeurs de `lamb` et `j` de votre choix, les valeurs renvoyées par `freq_Poisson(lamb,j,10000)` et la probabilité  $\mathbf{P}(X = j)$  où  $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\mathbf{lamb})$ .

### IV. — Loi exponentielle

On suppose ici que  $X$  suit une loi exponentielle de paramètre  $\lambda > 0$ . La situation est différente des précédentes puisqu'ici  $X$  est une variable aléatoire à densité. Cependant, la méthode d'inversion de la fonction de répartition  $F_X$  s'applique tout aussi bien. On va même voir que  $F_X$  réalise une bijection de  $[0; +\infty[$  sur  $[0; 1[$  et on va déterminer sa réciproque.

**Question 24.** En utilisant uniquement les propriétés du cours sur les fonctions de répartition, justifier que  $F_X$  est strictement croissante sur  $[0; +\infty[$ , déterminer  $F_X(0)$  et  $\lim_{t \rightarrow +\infty} F_X(t)$ . En déduire que  $F_X$  (restreinte à  $[0; +\infty[$ ) réalise une bijection de  $[0; +\infty[$  sur  $[0; 1[$ .

**Question 25.** Calculer explicitement, pour tout  $t \geq 0$ ,  $F_X(t)$  et en déduire que, pour tout  $t \geq 0$  et tout  $y \in [0; 1[$ ,

$$F_X(t) = y \iff t = -\frac{1}{\lambda} \ln(1 - y).$$

**Question 26.** En déduire que si  $Y \hookrightarrow \mathcal{U}([0; 1[)$  alors  $Z = -\frac{1}{\lambda} \ln(1 - Y)$  suit une loi  $\mathcal{E}(\lambda)$ .

**Question 27.** En utilisant la question précédente, écrire une fonction `simul_exp` qui prend en argument un réel `lamb` strictement positif et qui simule une variable aléatoire  $X \hookrightarrow \mathcal{E}(\text{lamb})$ .

**Question 28.** Écrire une fonction `freq_exp` qui prend en argument un réel `lamb` strictement positif, deux réels `a` et `b` (avec `a < b`) positifs et un entier naturel non nul `N` et qui renvoie la fréquence de résultats obtenus compris entre `a` et `b` lorsqu'on effectue `N` simulations d'une variable  $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\text{lamb})$  à l'aide de la fonction `simul_exp`.

**Question 29.** Soit  $a$  et  $b$  deux réels et  $X \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$ . Calculer  $\mathbf{P}(a \leq X \leq b)$ .

**Question 30.** Comparer, pour quelques valeurs de `lamb` et de `a` et `b` de votre choix, les valeurs renvoyées par `freq_exp(lamb, a, b, 10000)` et la probabilité  $\mathbf{P}(a \leq X \leq b)$  où  $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\text{lamb})$ .

## V. — Exercices

**Exercice 1** (Loi de Pascal). Soit  $r \in \mathbb{N}^*$  et  $p \in ]0; 1[$ . On dit qu'une variable  $X$  suit une loi de Pascal de paramètres  $r$  et  $p$  si  $X(\Omega) = \{k \in \mathbb{N} \mid k \geq r\}$  et, pour tout  $k \in X(\Omega)$ ,

$$\mathbf{P}(X = k) = \binom{k-1}{r-1} p^r (1-p)^{k-r}.$$

En utilisant la méthode d'inversion de la fonction de répartition, écrire une fonction `simul_Pascal` qui prend en argument un entier `r` supérieur ou égal à 1 et un réel `p` strictement compris entre 0 et 1 et qui simule une variable suivant une loi de Pascal de paramètres `r` et `p`.

**Exercice 2** (Loi de Cauchy). On considère une variable aléatoire  $X$  qui suit une loi de Cauchy i.e. une variable aléatoire dont la densité est  $f : x \mapsto \frac{1}{\pi(1+x^2)}$  (voir **Chap. 10, Ex. 2, 3**).

1. Déterminer la fonction de répartition  $F_X$  de  $X$ .
2. Montrer que  $F_X$  réalise une bijection de  $\mathbb{R}$  sur  $]0; 1[$  et déterminer  $F_X^{-1}$ .
3. En utilisant la question précédente, écrire une fonction `simul_Cauchy` qui simule  $X$ .

**Exercice 3** (Loi de Pareto). On considère une variable aléatoire  $X$  qui suit une loi de Pareto de paramètre  $a > 0$  i.e. une variable aléatoire dont la densité est

$$f : x \mapsto \begin{cases} \frac{1}{a} x^{-\frac{a+1}{a}} & \text{si } x \geq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Déterminer la fonction de répartition  $F_X$  de  $X$  sur  $[1; +\infty[$ .
2. Montrer que  $F_X$  réalise une bijection de  $[1; +\infty[$  sur  $[0; 1[$  et déterminer  $F_X^{-1}$ .
3. En utilisant la question précédente, écrire une fonction `simul_Pareto` prenant en paramètre un réel `a` strictement positif et qui simule  $X$ .
4. En utilisant cette simulation, estimer la valeur de l'espérance de  $X$  pour différentes valeurs de  $a \in ]0; 1[$  et comparer ces estimations avec la valeur calculée dans l'**Exercice 3** du **Chapitre 10**.