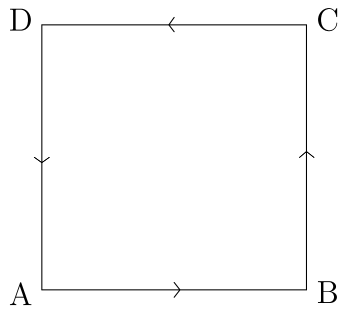
# ⧫ TP12 – Un exemple de marche aléatoire

## I. — Présentation du problème

On considère le jeu suivant. On dispose de deux urnes $U_1$ et $U_2$. L'urne $U_1$ contient 9 boules noires et 1 boule blanche et l'urne $U_2$ contient 2 boules noires et 3 boules blanches. Initialement, on dispose un pion sur le sommet A d'un carré. On tire une boule dans l'urne $U_1$. Si cette boule est blanche, on déplace le pion au sommet suivant dans le sens des flèches : il se retrouve donc sur B. Sinon, on laisse le pion dans sa position : il reste donc sur A. Ensuite, on répète le processus de la manière suivante. Lorsqu'on est sur un sommet S, on tire une boule dans l'urne $U_1$ si S = A ou S = D et dans l'urne $U_2$ si S = B ou S = C. Si cette boule est blanche, on déplace le pion sur le sommet suivant dans le sens des flèches et, sinon, on laisse le pion sur le sommet S.




Cette situation où on étudie le mouvement d'un objet qui évolue de façon aléatoire s'appelle une **marche aléatoire**.

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on note $A_n$ l'évènement : « après le $n-$ième lancer, le pion se trouve sur le sommet A ». On définit de même les évènements $B_n$, $C_n$ et $D_n$ respectivement pour les sommets B, C et D.

On note, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n$, $b_n$, $c_n$ et $d_n$ les probabilités respectives des évènements $A_n$, $B_n$, $C_n$ et $D_n$.

**Question 1.** Déterminer les valeurs de $a_0$, $b_0$, $c_0$ et $d_0$.

**Solution.** Initialement, le pion est sur le sommet A donc $a_0 = 1$ et $b_0 = c_0 = d_0 = 0$.

**Question 2.** Déterminer $a_1$, $b_1$, $c_1$ et $d_1$ puis utiliser la formule de probabilités totales pour calculer $a_2$, $b_2$, $c_2$ et $d_2$.

**Solution.** Comme $A_0$ est un évènement certain, pour tout évènement $B$, $B = B \cap A_0$ donc $\mathbf{P}(B) = \mathbf{P}(A_0)\mathbf{P}(B \mid A_0) = \mathbf{P}(B \mid A_0)$. Ainsi, $\mathbf{P}(A_1) = \mathbf{P}(A_1 \mid A_0) = \frac{9}{10}$, $\mathbf{P}(B_1) = \mathbf{P}(B_1 \mid A_0) = \frac{1}{10}$, $\mathbf{P}(C_1) = \mathbf{P}(C_1 \mid A_0) = 0$ et $\mathbf{P}(D_1) = \mathbf{P}(D_1 \mid A_0) = 0$. Autrement dit, $a_1 = \frac{9}{10}$, $b_1 = \frac{1}{10}$ et $c_1 = d_1 = 0$.

Les évènements $A_1$, $B_1$, $C_1$ et $D_1$ forment un système complet d'évènements donc, d'après la formule de probabilités totales,

$$\begin{aligned} a_2 = \mathbf{P}(A_2) &= \mathbf{P}(A_1)\mathbf{P}(A_2 \mid A_1) + \mathbf{P}(B_1)\mathbf{P}(A_2 \mid B_1) + \mathbf{P}(C_1)\mathbf{P}(A_2 \mid C_1) + \mathbf{P}(D_1)\mathbf{P}(A_2 \mid D_1) \\ &= \frac{9}{10} \times \frac{9}{10} + \frac{1}{10} \times 0 + 0 \times 0 + 0 \times 0 \end{aligned}$$

donc $a_2 = \dfrac{81}{100}$.

De même,

$$\begin{aligned} b_2 = \mathbf{P}(B_2) &= \mathbf{P}(A_1)\mathbf{P}(B_2 \mid A_1) + \mathbf{P}(B_1)\mathbf{P}(B_2 \mid B_1) + \mathbf{P}(C_1)\mathbf{P}(B_2 \mid C_1) + \mathbf{P}(D_1)\mathbf{P}(B_2 \mid D_1) \\ &= \frac{9}{10} \times \frac{1}{10} + \frac{1}{10} \times \frac{2}{5} + 0 \times 0 + 0 \times 0 \end{aligned}$$

donc $b_2 = \dfrac{13}{100}$,

$$\begin{aligned}c_2 = \mathbf{P}(C_2) &= \mathbf{P}(A_1)\mathbf{P}(C_2 \mid A_1) + \mathbf{P}(B_1)\mathbf{P}(C_2 \mid B_1) + \mathbf{P}(C_1)\mathbf{P}(C_2 \mid C_1) + \mathbf{P}(D_1)\mathbf{P}(C_2 \mid D_1)\\ &= \frac{9}{10} \times 0 + \frac{1}{10} \times \frac{3}{5} + 0 \times \frac{2}{5} + 0 \times 0\end{aligned}$$

donc $c_2 = \dfrac{3}{50}$ et

$$\begin{aligned}d_2 = \mathbf{P}(D_2) &= \mathbf{P}(A_1)\mathbf{P}(D_2 \mid A_1) + \mathbf{P}(B_1)\mathbf{P}(D_2 \mid B_1) + \mathbf{P}(C_1)\mathbf{P}(D_2 \mid C_1) + \mathbf{P}(D_1)\mathbf{P}(D_2 \mid D_1)\\ &= \frac{9}{10} \times 0 + \frac{1}{10} \times 0 + 0 \times \frac{3}{5} + 0 \times \frac{9}{10}\end{aligned}$$

donc $d_2 = 0$,

Le but de ce qui suit est de déterminer, lorsque $n$ devient grand, la probabilité de chacun des évènements $A_n$, $B_n$, $C_n$ et $D_n$ i.e. de déterminer, si elles existent, les limites des suites $(a_n)$, $(b_n)$, $(c_n)$ et $(d_n)$.

## II. — Simulation

**Question 3.** Écrire une fonction `urne1` sans paramètre qui simule un tirage dans l'urne $U_1$ et qui renvoie 1 si on tire une boule blanche et 0 sinon. On utilisera la fonction `randint` du module `random`.

**Solution.**

```
from random import *

def urne1():
  if randint(1,10) == 10:
    return 1
  return 0
```

**Question 4.** Écrire une fonction `urne2` sans paramètre qui simule un tirage dans l'urne $U_2$ et qui renvoie 1 si on tire une boule blanche et 0 sinon.

**Solution.**

```
def urne2():
  if randint(1,5) >= 3:
    return 1
  return 0
```

**Question 5.** Écrire une fonction `marche` qui prend en argument un entier naturel `n` non nul, qui simule `n` déplacements du pion et qui renvoie le numéro du sommet où se trouve le pion à l'issue des `n` déplacements.

**Solution.**

```python
def marche(n):
  S = 1
  for i in range(n):
    if S == 1 or S == 4:
      T = S + urne1()
      if T <= 4:
        S = T
      else:
        S = 1
    else:
      S += urne2()
  return S
```

**Question 6.** Écrire une fonction `simulation` qui prend en arguments un entier naturel `n` non nul et un entier naturel `N` non nul, qui simule `N` marches aléatoires de `n` déplacements à l'aide de la fonction `marche` et qui renvoie, sous forme de liste, les fréquences de réalisation des évènements $A_n$, $B_n$ et $C_n$ et $D_n$.

Par exemple, si en appelant `simulation(1000,100)`, la fonction `marche(1000)` a renvoyé 40 fois 1, 6 fois 2, 5 fois 3 et 49 fois 4 alors la fonction `simulation` doit renvoyer la liste

`[0.4, 0.06, 0.05, 0.49]`.

**Solution.**

```python
def simulation(n,N):
  L = [0, 0, 0, 0]
  for i in range(N):
    L[marche(n)-1] += 1
  return [L[i]/N for i in range(4)]
```

**Question 7.** En prenant différentes valeurs de `n` et de `N`, conjecturer le comportement asymptotique des suites $(a_n)$, $(b_n)$, $(c_n)$ et $(d_n)$.

**Solution.** Pour les appels suivants :

```python
print(simulation(1000,100))
print(simulation(1000,1000))
print(simulation(100,10000))
print(simulation(500,10000))
print(simulation(1000,10000))
print(simulation(1000,100000))
```

on obtient

```
[0.404, 0.078, 0.081, 0.437]
[0.404, 0.078, 0.081, 0.437]
[0.4318, 0.0679, 0.0723, 0.428]
[0.4194, 0.074, 0.0724, 0.4342]
[0.4299, 0.068, 0.0694, 0.4327]
[0.428, 0.06946, 0.07239, 0.43015]
```

On peut conjecturer que $(a_n)$ et $(d_n)$ convergent vers une limite proche de 0,43, que $(b_n)$ et $(c_n)$ convergent vers une limite proche de 0,07.

## III. — Étude mathématique à l'aide de matrices

**Question 8.** Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer la probabilité de $A_{n+1}$ sachant $A_n$, la probabilité de $B_{n+1}$ sachant $A_n$, la probabilité de $C_{n+1}$ sachant $A_n$ et la probabilité de $D_{n+1}$ sachant $A_n$.

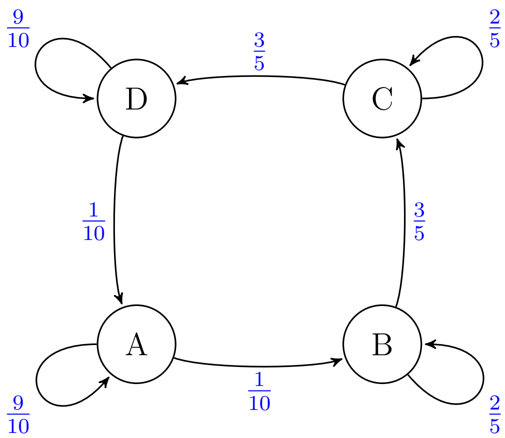
**Solution.** D'après l'énoncé, on a

$$\begin{array}{llll}
\mathbf{P}(A_{n+1} \mid A_n) = \dfrac{9}{10} & \mathbf{P}(B_{n+1} \mid A_n) = \dfrac{1}{10} & \mathbf{P}(C_{n+1} \mid A_n) = 0 & \mathbf{P}(D_{n+1} \mid A_n) = 0 \\
\mathbf{P}(A_{n+1} \mid B_n) = 0 & \mathbf{P}(B_{n+1} \mid B_n) = \dfrac{2}{5} & \mathbf{P}(C_{n+1} \mid B_n) = \dfrac{3}{5} & \mathbf{P}(B_{n+1} \mid D_n) = 0 \\
\mathbf{P}(A_{n+1} \mid C_n) = 0 & \mathbf{P}(B_{n+1} \mid C_n) = 0 & \mathbf{P}(C_{n+1} \mid C_n) = \dfrac{2}{5} & \mathbf{P}(D_{n+1} \mid C_n) = \dfrac{3}{5} \\
\mathbf{P}(A_{n+1} \mid D_n) = \dfrac{1}{10} & \mathbf{P}(B_{n+1} \mid D_n) = 0 & \mathbf{P}(C_{n+1} \mid D_n) = 0 & \mathbf{P}(D_{n+1} \mid D_n) = \dfrac{9}{10}
\end{array}$$

Ces probabilités s'appellent les **probabilités de transition** de l'état $A_n$ aux états $A_{n+1}$, $B_{n+1}$, $C_{n+1}$ et $D_{n+1}$. On remarque que ces probabilités ne dépendent pas de $n$. On les appellera aussi les probabilités de transition d'un sommet à un autre.

**Question 9.** Sur le graphe ci-contre, indiquer à côté des arcs les probabilités de transition entre les différents sommets. Ce graphe pondéré s'appelle un **graphe probabiliste**.

**Solution.** Voir ci-contre.




**Question 10.** On note $M$ la matrice d'adjacence de ce graphe pondéré. Déterminer $M$. La matrice $M$ s'appelle la **matrice de transition** associée à la marche aléatoire.

**Solution.** La matrice de transition est

$$M = \begin{pmatrix} \frac{9}{10} & \frac{1}{10} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{5} & \frac{3}{5} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{5} & \frac{3}{5} \\ \frac{1}{10} & 0 & 0 & \frac{9}{10} \end{pmatrix}$$

On définit, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la matrice ligne $X_n = \begin{pmatrix} a_n & b_n & c_n & d_n \end{pmatrix}$. La matrice $X_n$ s'appelle l'**état probabiliste** après $n$ lancers.

**Question 11.** Déterminer la matrice $X_0$ et justifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_{n+1} = X_n \times M$.

**Solution.** Par définition, $X_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Comme $A_n$, $B_n$, $C_n$ et $D_n$ forment un système complet d'évènements, d'après la formule des probabilités totales,

$$\begin{aligned}
a_{n+1} = \mathbf{P}(A_{n+1}) &= \mathbf{P}(A_n)\mathbf{P}_{A_n}(A_{n+1}) + \mathbf{P}(B_n)\mathbf{P}_{B_n}(A_{n+1}) + \mathbf{P}(C_n)\mathbf{P}_{C_n}(A_{n+1}) + \mathbf{P}(D_n)\mathbf{P}_{D_n}(A_{n+1}) \\
&= a_n \times \frac{9}{10} + b_n \times 0 + c_n \times 0 + d_n \times \frac{1}{10} = \frac{9}{10}a_n + \frac{1}{10}d_n
\end{aligned}$$

De la même façon, $b_{n+1} = \dfrac{1}{10}a_n + \dfrac{2}{5}b_n$, $c_{n+1} = \dfrac{3}{5}b_n + \dfrac{2}{5}c_n$ et $d_{n+1} = \dfrac{3}{5}c_n + \dfrac{9}{10}d_n$. Dès lors,

$$\begin{aligned}
X_{n+1} &= \begin{pmatrix} a_{n+1} & b_{n+1} & c_{n+1} & d_{n+1} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \dfrac{9}{10}a_n + \dfrac{1}{10}b_n & \dfrac{1}{10}a_n + \dfrac{2}{5}b_n & \dfrac{3}{5}b_n + \dfrac{2}{5}c_n & \dfrac{3}{5}c_n + \dfrac{9}{10}d_n \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a_n & b_n & c_n & d_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{9}{10} & \frac{1}{10} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{5} & \frac{3}{5} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{5} & \frac{3}{5} \\ \frac{1}{10} & 0 & 0 & \frac{9}{10} \end{pmatrix} \\
&= X_n M
\end{aligned}$$

**Question 12.** Démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n = X_0 M^n$.

**Solution.** Considérons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la proposition $H_n$ : « $X_n = X_0 M^n$ ».
**Initialisation.** $X_0 M^0 = X_0 I_4 = X_0$ donc $H_0$ est vraie.
**Hérédité.** Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $H_n$ est vraie. Alors, grâce à la question précédente,

$$X_{n+1} = X_n M = (X_0 M^n) M = X_0 (M^n M) = X_0 M^{n+1}$$

donc $H_{n+1}$ est vraie.
**Conclusion.** Par le principe de récurrence, on conclut que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n = X_0 M^n$.

# IV. — Détermination du comportement asymptotique à l'aide de Python

## 1) Conjecture à l'aide du calcul matriciel

On a vu dans le TP4 sur le pivot de Gauss qu'on peut représenter une matrice en Python par une liste de listes. Cette représentation, qui se prête bien à la programmation de l'algorithme du pivot, n'est en revanche pas adaptée lorsqu'on veut effectuer des calculs sur les matrices.

Dans la suite, on va utiliser le module `numpy` qui permet d'effectuer simplement des calculs sur les matrices. Pour cela, on commence par importer ce module en le renommant `np` à l'aide de l'instruction

```
import numpy as np
```

Une fois le module importé, on peut :

- définir une matrice à l'aide de la fonction `array`
- additionner et soustraire des matrices à l'aide des opérateurs `+` et `-`
- multiplier des matrices à l'aide de l'opérateur `@` (attention, l'opérateur `*` ne correspond pas au produit matriciel)
- calculer une puissance d'une matrice carrée à l'aide de la méthode `linalg.matrix_power()`
- calculer l'inverse d'une matrice carrée inversible à l'aide de la méthode `linalg.inv()`

Par exemple, pour définir les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 7 & 8 \end{pmatrix}$ puis calculer $D = AB$, $E = CA$ et $F = A^4$ et $G = A^{-1}$, on écrit

```
A=np.array([[1,2],[3,4]])
B=np.array([[5],[6]])
C=np.array([[7,8]])
D=A@B
E=C@A
F=np.linalg.matrix_power(A,4)
G=np.linalg.inv(A)
```

**Question 13.** Avec les notations de la partie III, définir les matrices $X_0$ (qu'on appellera simplement `X`) et $M$.

**Solution.**

```
X=np.array([[1,0,0,0]])
M=np.array([[9/10, 1/10, 0, 0],[0, 2/5, 3/5, 0],
   [0, 0, 2/5, 3/5], [1/10, 0, 0, 9/10]])
```

**Question 14.** Déterminer des valeurs approchées de $a_{10}$, $b_{10}$, $c_{10}$ et $d_{10}$.

**Solution.** D'après la question 14, $X_{10} = X_0M^{10}$. Or,

```
print(X@np.linalg.matrix_power(M,10)
```

renvoie

```
[[0.46489652 0.0825286  0.0906087  0.36196618]]
```

donc $a_{10} \approx 0{,}46489652$, $b_{10} \approx 0{,}0825286$, $c_{10} \approx 0{,}0906087$ et $d_{10} \approx 0{,}36196618$.

**Question 15.** Calculer $a_n$, $b_n$, $c_n$ et $d_n$ pour de « grandes valeurs » de $n$ et conjecturer la limite de chacune des ces suites. Ces conjectures sont-elles en accord avec celles de la question 7 ?

**Solution.** En exécutant

```
print(X@np.linalg.matrix_power(M,20))
print(X@np.linalg.matrix_power(M,50))
print(X@np.linalg.matrix_power(M,100))
print(X@np.linalg.matrix_power(M,200))
```

on obtient

```
[[0.42973175 0.07180925 0.07217165 0.42628735]]
[[0.42857146 0.07142858 0.07142859 0.42857137]]
[[0.42857143 0.07142857 0.07142857 0.42857143]]
[[0.42857143 0.07142857 0.07142857 0.42857143]]
```

donc on voit que $(a_n)$ et $(d_n)$ semblent converger vers une même limite égale à environ 0,42857143 et $(b_n)$ et $(c_n)$ semblent converger vers une même limite égale à environ 0,07142857.

Ces conjectures sont globalement en accord avec celles de la question 7.

## 2) Démonstration des conjectures

Le but de cette partie est de démontrer les conjectures précédentes. Pour cela, on va diagonaliser la matrice $M$ en utilisant les possibilités du module `numpy` qui permet de déterminer les valeurs propres d'une matrice, ainsi que des vecteurs propres associés, à l'aide de la méthode `linalg.eig()`. On ajoutera le code suivant pour obtenir les valeurs exactes des coefficients sous forme de fractions.

```
import fractions
np.set_printoptions(formatter={'all':lambda x:
    str(fractions.Fraction(x).limit_denominator())
    })
```

**Question 16.** Déterminer, à l'aide de `numpy`, les valeurs propres de la matrice $M$ et des vecteurs propres associés à chacune de ces valeurs propres. Pourquoi peut-on affirmer que $M$ est diagonalisable ?

**Solution.** L'instruction

```
print(np.linalg.eig(M))
```

affiche

```
(array([1, 7/10, 3/5, 3/10]), array([[1/2, 2/5,
    -3/10, 6/37],
[1/2, -4/5, 9/10, -36/37],
[1/2, -2/5, 3/10, 6/37],
[1/2, -1/5, 1/10, -1/37]]))
```

donc les valeurs propres de $M$ sont 1, $\frac{7}{10}$, $\frac{3}{5}$ et $\frac{3}{10}$ et des vecteurs propres respectivement associés sont $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} \frac{2}{5} \\ -\frac{4}{5} \\ -\frac{2}{5} \\ -\frac{1}{5} \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -\frac{3}{10} \\ \frac{9}{10} \\ \frac{3}{10} \\ \frac{1}{10} \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} \frac{6}{37} \\ -\frac{36}{37} \\ \frac{6}{37} \\ -\frac{1}{37} \end{pmatrix}$. On en déduit donc que $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -3 \\ 9 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 6 \\ -36 \\ 6 \\ -1 \end{pmatrix}$ sont également des vecteurs respectivement associés à 1, $\frac{7}{10}$, $\frac{3}{5}$ et $\frac{3}{10}$.

Comme $M$ est une matrice carrée d'ordre 4 qui admet 4 valeurs propres distinctes, $M$ est diagonalisable.

**Question 17.** En déduire une matrice diagonale $D$ et une matrice inversible $P$ telles que $M = PDP^{-1}$.

**Solution.** En posant $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{7}{10} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{3}{10} \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 6 \\ 1 & -4 & 9 & -36 \\ 1 & -2 & 3 & 6 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, on a $M = PDP^{-1}$.

**Question 18.** À l'aide de `numpy`, déterminer $P^{-1}$.

**Solution.** L'instruction

```
P=np.array([[1, 2, -3, 6],
[1, -4, 9, -36],
[1, -2, 3, 6],
[1, -1, 1, -1]])
print(np.linalg.inv(P))
```

affiche

```
[[3/7 1/14 1/14 3/7]
[3/4 1/4 1/2 -3/2]
[1/3 1/6 1/2 -1]
[1/84 -1/84 1/14 -1/14]]
```

donc $P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{3}{7} & \frac{1}{14} & \frac{1}{14} & \frac{3}{7} \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{2} & -1 \\ \frac{1}{84} & -\frac{1}{84} & \frac{1}{14} & -\frac{1}{14} \end{pmatrix}$.

**Question 19.** Utiliser la question 12 pour calculer, à la main, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la matrice $X_n$.

**Solution.** Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors, par théorème, $M^n = PD^nP^{-1}$. Or, comme $D$ est diagonale, $D^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (\frac{7}{10})^n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (\frac{3}{5})^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (\frac{3}{10})^n \end{pmatrix}$ donc

$$\begin{aligned}
X_n &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 6 \\ 1 & -4 & 9 & -36 \\ 1 & -2 & 3 & 6 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (\frac{7}{10})^n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (\frac{3}{5})^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (\frac{3}{10})^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{3}{7} & \frac{1}{14} & \frac{1}{14} & \frac{3}{7} \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{2} & -1 \\ \frac{1}{84} & -\frac{1}{84} & \frac{1}{14} & -\frac{1}{14} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (\frac{7}{10})^n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (\frac{3}{5})^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (\frac{3}{10})^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{3}{7} & \frac{1}{14} & \frac{1}{14} & \frac{3}{7} \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{2} & -1 \\ \frac{1}{84} & -\frac{1}{84} & \frac{1}{14} & -\frac{1}{14} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 2(\frac{7}{10})^n & -3(\frac{3}{5})^n & 6(\frac{3}{10})^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{3}{7} & \frac{1}{14} & \frac{1}{14} & \frac{3}{7} \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{2} & -1 \\ \frac{1}{84} & -\frac{1}{84} & \frac{1}{14} & -\frac{1}{14} \end{pmatrix} \\
&= \Big( \frac{3}{7} + \frac{3}{2}\left(\frac{7}{10}\right)^n - \left(\frac{3}{5}\right)^n + \frac{1}{14}\left(\frac{3}{10}\right)^n \quad \frac{1}{14} + \frac{1}{2}\left(\frac{7}{10}\right)^n - \frac{1}{2}\left(\frac{3}{5}\right)^n - \frac{1}{14}\left(\frac{3}{10}\right)^n \\
&\qquad \frac{1}{14} + \left(\frac{7}{10}\right)^n - \frac{3}{2}\left(\frac{3}{5}\right)^n + \frac{3}{7}\left(\frac{3}{10}\right)^n \quad \frac{3}{7} - 3\left(\frac{7}{10}\right)^n + 3\left(\frac{3}{5}\right)^n - \frac{3}{7}\left(\frac{3}{10}\right)^n \Big)
\end{aligned}$$

**Question 20.** Démontrer les conjectures précédentes.

**Solution.** Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{cases} a_n &= \frac{3}{7} + \frac{3}{2}\left(\frac{7}{10}\right)^n - \left(\frac{3}{5}\right)^n + \frac{1}{14}\left(\frac{3}{10}\right)^n \\ b_n &= \frac{1}{14} + \frac{1}{2}\left(\frac{7}{10}\right)^n - \frac{1}{2}\left(\frac{3}{5}\right)^n - \frac{1}{14}\left(\frac{3}{10}\right)^n \\ c_n &= \frac{1}{14} + \left(\frac{7}{10}\right)^n - \frac{3}{2}\left(\frac{3}{5}\right)^n + \frac{3}{7}\left(\frac{3}{10}\right)^n \\ d_n &= \frac{3}{7} - 3\left(\frac{7}{10}\right)^n + 3\left(\frac{3}{5}\right)^n - \frac{3}{7}\left(\frac{3}{10}\right)^n \end{cases}$$

Comme $0 < \frac{7}{10} < 1$, $0 < \frac{3}{5} < 1$ et $0 < \frac{3}{10} < 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} (\frac{7}{10})^n = \lim\limits_{n\to+\infty} (\frac{3}{5})^n = \lim\limits_{n\to+\infty} (\frac{3}{10})^n = 0$ donc, par somme, $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \lim\limits_{n\to+\infty} d_n = \frac{3}{7}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = \lim\limits_{n\to+\infty} c_n = \frac{1}{14}$.

Enfin, étant donné que $\frac{1}{14} \approx 0{,}07142857143$ et $\frac{3}{7} \approx 0{,}4285714286$, cela valide les conjectures précédentes.