⧫ TP12 – Approximation de la loi de Poisson par une loi binomiale

I. — Programmation

On fixe un réel $\lambda > 0$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère une variable aléatoire X_n suivant une loi binomiale de paramètres n et $\dfrac{\lambda}{n}$. On désigne, de plus, par Y une variable aléatoire suivant une loi de Poisson de paramètre λ.

On peut démontrer (c'est le but du second paragraphe) que lorsque n devient grand, la variable X_n est une bonne approximation de Y. Autrement dit, lorsque n devient grand, on peut approcher la loi de Poisson $\mathscr{P}(\lambda)$ par la loi binomiale $\mathscr{B}\left(n, \dfrac{\lambda}{n}\right)$.

1. En utilisant la fonction `random` du module `random`, écrire une fonction `bernoulli` prenant en argument un réel `p` compris entre 0 et 1 et qui simule une variable aléatoire suivant une loi de Bernoulli de paramètre `p`.

2. En utilisant la fonction `bernoulli`, écrire une fonction `binomiale` prenant en argument un entier naturel `n` non nul et un réel `p` compris entre 0 et 1 et qui simule une variable aléatoire suivant une loi binomiale de paramètres `n` et `p`.

3. En déduire une fonction `approx_Poisson` qui prend en arguments un réel `lamb` strictement positif et un entier naturel `n` et qui simule une variable aléatoire dont la loi est approximativement une loi de Poisson pour `n` assez grand.

4. Écrire une fonction `liste_approx_Poisson` qui prend en arguments un entier naturel `N` non nul, un réel strictement positif `lamb` et un entier naturel `n` et qui renvoie une liste de `N` résultats renvoyés par `approx_Poisson(lamb,n)`.

5. Écrire une fonction `frequence` prenant en arguments un nombre entier naturel `k` et une liste d'entiers naturels `L` et qui renvoie la fréquence d'apparition de `k` dans `L` i.e. le nombre d'occurrences de `k` dans la liste `L` divisé par le nombre total d'éléments de la liste.

6. Le tableau ci-dessous donne la valeur arrondie à 10^{-3} près de $\mathbf{P}(Y = k)$ pour différentes valeurs de λ et de k.

k \ λ	0,5	1	1,5	2	2,5	3	4	5	6
0	0,607	0,368	0,223	0,135	0,082	0,050	0,018	0,007	0,002
1	0,303	0,368	0,335	0,271	0,205	0,149	0,073	0,037	0,015
2	0,076	0,184	0,251	0,271	0,257	0,224	0,147	0,084	0,045
3	0,013	0,061	0,126	0,180	0,214	0,224	0,195	0,140	0,089
4	0,002	0,015	0,047	0,090	0,134	0,168	0,195	0,175	0,134
5	0,000	0,003	0,014	0,036	0,067	0,101	0,156	0,175	0,161
10	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,001	0,005	0,018	0,041

Comparer ces valeurs avec les résultats renvoyés, pour différentes valeurs de `N` et de `n`, par `frequence(k,liste_approx_Poisson(N,lamb,n))` lorsque `k` prend la valeur k et `lamb` la valeur λ.

II. — Étude mathématique

On fixe un réel $\lambda > 0$ et un entier $k \in \mathbb{N}$. Pour tout $n \geqslant k$, on considère une variable aléatoire X_n suivant une loi binomiale de paramètres n et $\dfrac{\lambda}{n}$. On désigne, de plus, par Y une variable aléatoire suivant une loi de Poisson de paramètre λ.

1. Soit un entier $n \geqslant k$. Rappeler les valeurs de $\mathbf{P}(X_n = k)$ et $\mathbf{P}(Y = k)$.

2. Soit un entier $n \geqslant k$. Rappeler les valeurs de $\mathbf{E}(X_n)$, $\mathbf{V}(X_n)$, $\mathbf{E}(Y)$ et $\mathbf{V}(Y)$ puis vérifier que $\mathbf{E}(X_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mathbf{E}(Y)$ et $\mathbf{V}(X_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mathbf{V}(Y)$.

3. Montrer que, lorsque n tend vers $+\infty$, $\dbinom{n}{k} \sim \dfrac{n^k}{k!}$.

4. Soit un entier $n \geqslant k$. Écrire $\left(1 - \dfrac{\lambda}{n}\right)^{n-k}$ à l'aide de la fonction exponentielle.

5. Déduire de la question précédente que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} = \mathrm{e}^{-\lambda}$.

6. Conclure que $\mathbf{P}(X_n = k) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mathbf{P}(Y = k)$.