Feuille de calcul n°9 — Opérations sur les fractions (II) – Corrigé

Exercice 1. Simplifier les fractions suivantes (où $k \in \mathbb{N}$).

$$A = \frac{32}{40} \qquad B = 8^3 \times \frac{1}{4^2} \qquad C = \frac{27^{-1} \times 4^2}{3^{-4} \times 2^4} \qquad D = \frac{(-2)^{2k+1} \times 3^{2k-1}}{4^k \times 3^{-k+1}}$$

Solution.

$A = \dfrac{4 \times 8}{5 \times 8}$ donc $\boxed{A = \dfrac{4}{5}}$

$B = \dfrac{(2^3)^3}{(2^2)^2} = \dfrac{2^9}{2^4} = 2^5$ donc $\boxed{B = 32}$

$C = \dfrac{(3^3)^{-1} \times (2^2)^2}{3^{-4} \times 2^4} = \dfrac{3^{-3} \times 2^4}{3^{-4} \times 2^4} = 3^{-3+4}$ donc $\boxed{C = 3}$

$D = \dfrac{(-1 \times 2)^{2k+1} \times 3^{2k-1}}{(2^2)^k \times 3^{-k+1}} = \dfrac{(-1)^{2k+1} \times 2^{2k+1} \times 3^{2k-1}}{2^{2k} \times 3^{-k+1}} = (-1) \times 2^{2k+1-2k} \times 3^{2k-1-(-k+1)}$
donc $\boxed{D = -2 \times 3^{3k-2}}$

Exercice 2. Écrire les nombres suivants sous forme d'une fraction irréductible.

$$A = \frac{2}{4} - \frac{1}{3} \qquad B = \frac{2}{3} - 0{,}2 \qquad C = \frac{36}{25} \times \frac{15}{12} \times 5 \qquad D = -\frac{2}{15} \div \left(-\frac{6}{5}\right)$$

Solution.

$A = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{3} = \dfrac{3}{6} - \dfrac{2}{6}$ donc $\boxed{A = \dfrac{1}{6}}$

$B = \dfrac{2}{3} - \dfrac{1}{5} = \dfrac{10}{15} - \dfrac{3}{15}$ donc $\boxed{B = \dfrac{7}{15}}$

$C = \dfrac{3 \times 12}{5 \times 5} \times \dfrac{3 \times 5}{1 \times 12} \times 5 = \dfrac{3 \times 3}{1}$ donc $\boxed{C = 9}$

$D = -\dfrac{2}{3 \times 5} \times \left(-\dfrac{5}{6}\right) = \dfrac{2}{3 \times 5} \times \dfrac{5}{2 \times 3} = \dfrac{1}{3 \times 3}$ donc $\boxed{D = \dfrac{1}{9}}$

Exercice 3. Écrire les nombres suivants sous forme de fractions irréductibles.

$$A = (2 \times 3 \times 5 \times 7)\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7}\right) \qquad B = \left(\frac{136}{15} - \frac{28}{5} + \frac{62}{10}\right) \times \frac{21}{24}$$

$$C = \frac{5^{10} \times 7^3 - 25^5 \times 49^2}{(125 \times 7)^3 + 5^9 \times 14^3} \qquad D = \frac{1978 \times 1979 + 1980 \times 21 + 1958}{1980 \times 1979 - 1978 \times 1979}$$

Solution.
$A=(2\times3\times5\times7)\left(\frac{3\times5\times7}{2\times3\times5\times7}+\frac{2\times5\times7}{2\times3\times5\times7}+\frac{2\times3\times7}{2\times3\times5\times7}+\frac{2\times3\times5}{2\times3\times5\times7}\right)$
$=3\times5\times7+2\times5\times7+2\times3\times7+2\times3\times5$
$=105+70+42+30$
donc $\boxed{A=247}$

$B=\left(\frac{272}{30}-\frac{168}{30}+\frac{186}{30}\right)\times\frac{3\times7}{3\times8}=\frac{290}{30}\times\frac{7}{8}=\frac{29}{3}\times\frac{7}{8}$ donc $\boxed{B=\frac{203}{24}}$

$C=\frac{5^{10}\times7^3-(5^2)^5\times(7^2)^2}{(5^3\times7)^3+5^9\times(2\times7)^3}=\frac{5^{10}\times7^3-5^{10}\times7^4}{5^9\times7^3+5^9\times2^3\times7^3}=\frac{5^{10}\times7^3(1-7)}{5^9\times7^3(1+2^3)}=\frac{5\times(-6)}{9}$ donc $\boxed{C=-\frac{10}{3}}$

$D=\frac{1978\times1979+(1979+1)\times21+1958}{1979(1980-1978)}=\frac{1978\times1979+1979\times21+21+1958}{1979\times2}$
$=\frac{1979(1978+21)+1979}{1979\times2}=\frac{1979(1999+1)}{1979\times2}=\frac{2000}{2}$ donc $\boxed{D=1000}$

Exercice 4. Écrire le nombre suivant sous forme de fraction irréductible.

$$A=\frac{0{,}5-\frac{3}{17}+\frac{3}{37}}{\frac{5}{6}-\frac{5}{17}+\frac{5}{37}}+\frac{0{,}5-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-0{,}2}{\frac{7}{5}-\frac{7}{4}+\frac{7}{3}-3{,}5}$$

Solution.

$$A=\frac{\frac{3}{6}-\frac{3}{17}+\frac{3}{37}}{\frac{5}{6}-\frac{5}{17}+\frac{5}{37}}+\frac{\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{5}}{\frac{7}{5}-\frac{7}{4}+\frac{7}{3}-\frac{7}{2}}=\frac{3\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{17}+\frac{1}{37}\right)}{5\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{17}+\frac{1}{37}\right)}+\frac{(-1)\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}\right)}{7\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\right)}$$
$$=\frac{3}{5}+\frac{-1}{7}=\frac{21}{35}-\frac{5}{35}$$

donc $\boxed{A=\frac{16}{35}}$.

Exercice 5. Soit un entier $n\geqslant3$ et a et b deux réels tels que $a\neq b$. Écrire sous la forme d'une seule fraction les nombres suivants en simplifiant au maximum.

$$A=\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n}\qquad B=\frac{a^3-b^3}{(a-b)^2}-\frac{(a+b)^2}{a-b}\qquad C=\frac{\frac{6(n+1)}{n(n-1)(2n-2)}}{\frac{2n+2}{n^2(n-1)^2}}.$$

Solution.
$A=\frac{n}{n(n+1)^2}+\frac{n(n+1)}{n(n+1)^2}-\frac{(n+1)^2}{n(n+1)^2}=\frac{n+n^2+n-(n^2+2n+1)}{n(n+1)^2}=\frac{n^2+2n-n^2-2n-1}{n(n+1)^2}$
doc $\boxed{A=-\frac{1}{n(n+1)^2}}$

$B=\frac{a^3-b^3}{(a-b)^2}-\frac{(a^2+2ab+b^2)(a-b)}{(a-b)^2}=\frac{a^3-b^3-(a^3+2a^2b+b^2a-a^2b-2ab^2-b^3)}{(a-b)^2}$
$=\frac{a^3-b^3-a^3-a^2b+ab^2+b^3}{(a-b)^2}=\frac{ab^2-a^2b}{(a-b)^2}=\frac{ab(b-a)}{(a-b)^2}=\frac{-ab(a-b)}{(a-b)^2}$

donc $\boxed{B = -\frac{ab}{a-b} = \frac{ab}{b-a}}$.

$C = \frac{6(n+1)}{2n(n-1)^2} \times \frac{n^2(n-1)^2}{2(n+1)}$ donc $\boxed{C = \frac{3n}{2}}$

Exercice 6. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $t \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$. Simplifier l'écriture des nombres suivants

$$A = \frac{\sum_{k=0}^{n^2} k}{\sum_{k=0}^{n} k} \qquad \text{et} \qquad B = \left(\frac{1}{1+t^2} - \frac{1}{(1+t)^2}\right)\left((1+t^2)(1+t)^2\right)$$

Solution.

$A = \frac{\frac{n^2(n^2+1)}{2}}{\frac{n(n+1)}{2}} = \frac{n^2(n^2+1)}{n(n+1)}$ donc $\boxed{A = \frac{n(n^2+1)}{n+1}}$

$B = \frac{(1+t^2)(1+t)^2}{1+t^2} - \frac{(1+t^2)(1+t)^2}{(1+t)^2} = (1+t)^2 - (1+t^2) = 1 + 2t + t^2 - 1 - t^2$ donc $\boxed{B = 2t}$