Feuille de calcul n°6 — Équations et inéquations du second degré

Exercice 1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes d'inconnue x.

$$(E_1) : -x^2+3x=0 \qquad (E_2) : -x^2+6=0 \qquad (E_3) : x^2+6x+9=0$$

$$(E_4) : x(x+1)=x+4 \qquad (E_5) : x=3x^2 \qquad (E_6) : \frac{2x}{x^2+1}=1$$

Solution.

$$(E_1) \iff x(-x+3)=0 \iff x=0 \text{ ou } -x+3=0 \iff x=0 \text{ ou } x=3$$

donc $\boxed{\text{l'ensemble des solutions de } (E_1) \text{ est } \{0\,;3\}}$.

$$(E_2) \iff \sqrt{6}^2-x^2=0 \iff (\sqrt{6}-x)(\sqrt{6}+x)=0 \iff \sqrt{6}-x=0 \text{ ou } \sqrt{6}+x=0$$
$$\iff x=\sqrt{6} \text{ ou } x=-\sqrt{6}$$

donc $\boxed{\text{l'ensemble des solutions de } (E_2) \text{ est } \{-\sqrt{6}\,;\sqrt{6}\}}$.

$$(E_3) \iff x^2+2\times x\times 3+3^2=0 \iff (x+3)^2=0 \iff x+3=0 \iff x=-3$$

donc $\boxed{\text{l'ensemble des solutions de } (E_3) \text{ est } \{3\}}$.

$$(E_4) \iff x^2+x=x+4 \iff x^2-2^2=0 \Leftrightarrow (x-2)(x+2)=0 \Leftrightarrow x-2=0 \text{ ou } x+2=0$$
$$\iff x=2 \text{ ou } x=-2$$

donc $\boxed{\text{l'ensemble des solutions de } (E_4) \text{ est } \{-2\,;2\}}$.

$$(E_5) \iff x(1-3x)=0 \iff x=0 \text{ ou } 1-3x=0 \iff x=0 \text{ ou } x=\frac{1}{3}$$

donc $\boxed{\text{l'ensemble des solutions de } (E_5) \text{ est } \{0\,;\tfrac{1}{3}\}}$.

Pour tout réel x, $x^2+1\neq 0$ donc

$$(E_6) \iff 2x=x^2+1 \iff x^2-2x+1=0 \iff (x-1)^2=0 \iff x-1=0 \iff x=1$$

donc $\boxed{\text{l'ensemble des solutions des } (E_6) \text{ est } \{1\}}$.

Exercice 2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes d'inconnue x.

$$(E_1) : x^2 + x + 4 = 0 \qquad (E_2) : x^2 + 4x - 12 = 0$$
$$(E_3) : x^2 + 4x = 5 \qquad (E_4) : 3x^2 - 11x + 8 = 0.$$

Solution.

Le discriminant de $x^2 + x + 4$ est $\Delta = 1^2 - 4 \times 1 \times 4 = -15 < 0$. On en déduit que $\boxed{\text{l'ensemble des solutions de } (E_1) \text{ est } \varnothing}$.

Le discriminant de $x^2 + 4x - 12$ est $4^2 - 4 \times 1 \times (-12) = 64 > 0$ donc (E_2) possède deux solutions réelles :

$$x_1 = \frac{-4 - \sqrt{64}}{2 \times 1} = \frac{-4 - 8}{2} = -6 \qquad \text{et} \qquad x_2 = \frac{-4 + \sqrt{64}}{2 \times 1} = \frac{-4 + 8}{2} = 2$$

Ainsi, $\boxed{\text{l'ensemble des solutions de } (E_2) \text{ est } \{-6\,;2\}}$.

(E_3) est équivalente à $x^2+4x-5 = 0$. Le discriminant de x^2+4x-5 est $\Delta = 4^2-4\times1\times(-5) = 36 > 0$ donc l'équation possède deux solutions

$$x_1 = \frac{-4 - \sqrt{36}}{2 \times 1} = \frac{-4 - 6}{2} = -5 \qquad \text{et} \qquad x_2 = \frac{-4 + \sqrt{36}}{2 \times 1} = \frac{-4 + 6}{2} = 1$$

Ainsi, $\boxed{\text{l'ensemble des solutions de } (E_3) \text{ est } \{-5\,;1\}}$.

Le discriminant de $3x^2 - 11x + 8$ est $(-11)^2 - 4 \times 3 \times 8 = 25 > 0$ donc (E_4) possède deux solutions réelles :

$$x_1 = \frac{-(-11) - \sqrt{25}}{2 \times 3} = \frac{11 - 5}{6} = 1 \qquad \text{et} \qquad x_2 = \frac{-(-11) + \sqrt{25}}{2 \times 3} = \frac{11 + 5}{6} = \frac{8}{3}$$

Ainsi, $\boxed{\text{l'ensemble des solutions de } (E_4) \text{ est } \{1\,;\tfrac{8}{3}\}}$.

Exercice 3. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes d'inconnue x.

$$(E_1) : 9x^2 + 6x + 1 = 0 \qquad (E_2) : x^2 - 5x + 6 = 0$$
$$(E_3) : 5x^2 + 24x + 19 = 0 \qquad (E_4) : x^4 - 3x^2 + 2 = 0.$$

Solution.

$$(E_1) \iff (3x)^2 + 2 \times (3x) \times 1 + 1^2 = 0 \iff (3x+1)^2 = 0 \iff 3x + 1 = 0 \iff x = -\frac{1}{3}$$

Ainsi, $\boxed{\text{l'ensemble des solutions de } (E_1) \text{ est } \{-\tfrac{1}{3}\}}$.

Le discriminant de $x^2 - 5x + 6$ est $\Delta = (-5)^2 - 4 \times 1 \times 6 = 1 > 0$ donc (E_2) possède deux solutions réelles :

$$x_1 = \frac{-(-5) - \sqrt{1}}{2 \times 1} = \frac{5 - 1}{2} = 2 \qquad \text{et} \qquad x_2 = \frac{-(-5) + \sqrt{1}}{2 \times 1} = \frac{5 + 1}{2} = 3$$

Ainsi, $\boxed{\text{l'ensemble des solutions de } (E_2) \text{ est } \{2\,;3\}}$.

Le discriminant de $5x^2+24x+19$ est $\Delta = 24^2 - 4\times 5\times 19 = 196 > 0$ donc (E_3) possède deux solutions réelles :

$$x_1 = \frac{-24-\sqrt{196}}{2\times 5} = \frac{-24-14}{10} = -\frac{19}{5} \qquad \text{et} \qquad x_2 = \frac{-24+\sqrt{196}}{2\times 5} = \frac{-24+14}{10} = -1$$

Ainsi, $\boxed{\text{l'ensemble des solutions de } (E_3) \text{ est } \{-\frac{19}{5}\,;-1\}}$.

Posons $X = x^2$ de sorte que (E_4) se réécrit $X^2-3X+2=0$. Le discriminant de X^2-3X+2 est $\Delta = (-3)^2 - 4\times 1\times 2 = 1 > 0$ donc l'équation $X^2-3X+2=0$ possède deux solutions réelles :

$$X_1 = \frac{-(-3)-\sqrt{1}}{2\times 1} = \frac{3-1}{2} = 1 \qquad \text{et} \qquad X_2 = \frac{-(-3)+\sqrt{1}}{2\times 1} = \frac{3+1}{2} = 2$$

Ainsi

$$\begin{aligned}(E_4) &\iff x^2 = 1 \text{ ou } x^2 = 2 \iff \sqrt{x^2} = 1 \text{ ou } \sqrt{x^2} = \sqrt{2} \iff |x| = 1 \text{ ou } |x| = \sqrt{2} \\ &\iff x = 1 \text{ ou } x = -1 \text{ ou } x = \sqrt{2} \text{ ou } x = -\sqrt{2}.\end{aligned}$$

Ainsi, $\boxed{\text{l'ensemble des solutions de } (E_3) \text{ est } \{-1\,;1\,;-\sqrt{2}\,;\sqrt{2}\}}$.

Exercice 4. Étudier, en fonction de x, le signe des expressions suivantes.

1. $A(x) = 3x^2-5x+1$
2. $B(x) = -4x+2x^2-3$
3. $C(x) = \frac{x^2}{4}+x+1$
4. $D(x) = 5x^2-4x+1$

Solution.

1. Le discriminant de $A(x)$ est $\Delta = (-5)^2 - 4\times 3\times 1 = 13 > 0$ donc l'équation $A(x)=0$ possède deux solutions réelles :

$$x_1 = \frac{-(-5)-\sqrt{13}}{2\times 3} = \frac{5-\sqrt{13}}{6} \qquad \text{et} \qquad x_2 = \frac{-(-5)+\sqrt{13}}{2\times 6} = \frac{5+\sqrt{13}}{6}.$$

Comme $a = 3 > 0$, on conclut que $\boxed{A(x) \geqslant 0 \text{ pour tout } x \in \left]-\infty\,;\frac{5-\sqrt{13}}{6}\right] \cup \left[\frac{5+\sqrt{13}}{6}\,;+\infty\right[}$

et $\boxed{A(x) \leqslant 0 \text{ pour tout } x \in \left[\frac{5-\sqrt{13}}{6}\,;\frac{5+\sqrt{13}}{6}\right]}$.

2. Le discriminant de $B(x) = 2x^2-4x-3$ est $\Delta = (-4)^2 - 4\times 2\times(-3) = 40 > 0$ donc l'équation $B(x)=0$ possède deux solutions réelles :

$$x_1 = \frac{-(-4)-\sqrt{40}}{2\times 2} = \frac{4-\sqrt{4\times 10}}{4} = \frac{4-2\sqrt{10}}{4} = \frac{2-\sqrt{10}}{2}$$

et

$$x_2 = \frac{-(-4)+\sqrt{40}}{2\times 2} = \frac{4+\sqrt{4\times 10}}{4} = \frac{4+2\sqrt{10}}{4} = \frac{2+\sqrt{10}}{2}.$$

Comme $a = 2 > 0$, on conclut que $\boxed{B(x) \geqslant 0 \text{ pour tout } x \in \left]-\infty\,;\frac{2-\sqrt{10}}{2}\right] \cup \left[\frac{2+\sqrt{10}}{2}\,;+\infty\right[}$

et $\boxed{B(x) \leqslant 0 \text{ pour tout } x \in \left[\frac{2-\sqrt{10}}{2}\,;\frac{2+\sqrt{10}}{2}\right]}$.

3. Le discriminant de $C(x)$ est $\Delta = 1^2 - 4 \times \frac{1}{4} \times 1 = 0$ donc l'équation $C(x) = 0$ possède une unique solution : $x_0 = \dfrac{-1}{2 \times \frac{1}{4}} = -2$ et, comme $a = \frac{1}{4} > 0$, $\boxed{\text{pour tout réel } x \neq -2,\ C(x) > 0}$.

4. Le discriminant de $D(x)$ est $\Delta = (-4)^2 - 4 \times 5 \times 1 = -4 < 0$ donc, comme $a = 5 > 0$, $\boxed{\text{pour tout réel } x,\ D(x) > 0}$.

Exercice 5. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes d'inconnue x.

$(E_1) : x^2 - 6x + 9 \leqslant 0$

$(E_2) : x^2 + x \geqslant -1$

$(E_3) : -2x^2 - 3x + 6 \leqslant 0$

$(E_4) : 7x^2 + 6x < 1$

$(E_5) : x(x + 3) > x + 2$

$(E_6) : x - \sqrt{x} - 2 \geqslant 0$

Solution.

Pour tout réel x, $x^2 - 6x + 9 = x^2 - 2 \times x \times 3 + 3^2 = (x - 3)^2 \geqslant 0$ donc $x^2 - 6x + 9 \leqslant 0$ si et seulement si $x^2 - 6x + 9 = 0$ i.e. $(x - 3)^2 = 0$ ce qui équivaut à $x = 3$.

Ainsi, $\boxed{\text{l'ensemble des solutions de } (E_1) \text{ est } \{3\}}$.

$(E_2) \Leftrightarrow x^2 + x + 1 \geqslant 0$. Or, le discriminant de $x^2 + x + 1$ est $\Delta = 1^2 - 4 \times 1 \times 1 = -3 < 0$ donc, comme $a = 1 > 0$, pour tout réel x, $x^2 + x + 1 > 0$.

Ainsi, $\boxed{\text{l'ensemble des solutions de } (E_2) \text{ est } \mathbb{R}}$.

Le discriminant de $-2x^2 - 3x + 6$ est $\Delta = (-3)^2 - 4 \times (-2) \times 6 = 57 > 0$ donc l'équation $-2x^2 - 3x + 6 = 0$ possède deux solutions réelles :

$$x_1 = \frac{-(-3) - \sqrt{57}}{2 \times (-2)} = \frac{3 - \sqrt{57}}{-4} = \frac{-3 + \sqrt{57}}{4} \qquad \text{et} \qquad x_2 = \frac{-(-3) + \sqrt{57}}{2 \times (-2)} = \frac{3 + \sqrt{57}}{-4} = \frac{-3 - \sqrt{57}}{4}$$

et, comme $a = -2 < 0$, on en déduit que $-2x^2 - 3w + 6 \leqslant 0$ si et seulement si $x \in \left]-\infty\,;\frac{-3 - \sqrt{57}}{4}\right] \cup \left[\frac{-3 + \sqrt{57}}{4}\,;+\infty\right[$.

Ainsi, $\boxed{\text{l'ensemble des solutions des } (E_3) \text{ est } \left]-\infty\,;\frac{-3 - \sqrt{57}}{4}\right] \cup \left[\frac{-3 + \sqrt{57}}{4}\,;+\infty\right[}$.

(E_4) équivaut à $7x^2 + 6x - 1 < 0$. Le discriminant de $7x^2 + 6x - 1$ est $\Delta = 6^2 - 4 \times 7 \times (-1) = 64 > 0$ donc l'équation $7x^2 + 6x - 1 = 0$ possède deux solutions réelles :

$$x_1 = \frac{-6 - \sqrt{64}}{2 \times 7} = \frac{-6 - 8}{14} = -1 \qquad \text{et} \qquad x_2 = \frac{-6 + \sqrt{64}}{2 \times 7} = \frac{-6 + 8}{14} = \frac{1}{7}$$

donc, comme $a = 7 > 0$, $7x^2 + 6x - 1 < 0$ si et seulement si $x \in \left]-1\,;\frac{1}{7}\right[$.

Ainsi, $\boxed{\text{l'ensemble des solutions de } (E_4) \text{ est } \left]-1\,;\frac{1}{7}\right[}$.

(E_5) équivaut à $x^2 + 3x - (x + 2) > 0$ i.e. $x^2 + 2x - 2 > 0$. Le discriminant de $x^2 + 2x - 2$ est $\Delta = 2^2 - 4 \times 1 \times (-2) = 12 > 0$ donc l'équation $x^2 + 2x - 2 = 0$ possède deux solutions réelles :

$$x_1 = \frac{-2 - \sqrt{12}}{2 \times 1} = \frac{-2 - \sqrt{4 \times 3}}{2} = \frac{-2 - 2\sqrt{3}}{2} = -1 - \sqrt{3}$$

et

$$x_2 = \frac{-2+\sqrt{12}}{2\times 1} = \frac{-2+\sqrt{4\times 3}}{2} = \frac{-2+2\sqrt{3}}{2} = -1+\sqrt{3}$$

Comme $a = 1 > 0$, on en déduit que $x^2 + 2x - 2 > 0$ si et seulement si $x \in \left]-\infty\,;-1-\sqrt{3}\right[\cup \left[-1+\sqrt{3}\,;+\infty\right[$.

Ainsi, $\boxed{\text{l'ensemle des solutions de } (E_5) \text{ est } \left]-\infty\,;-1-\sqrt{3}\right[\cup \left[-1+\sqrt{3}\,;+\infty\right[}$.

Commençons par remarquer que (E_6) a un sens si et seulement si $x \geqslant 0$. Ensuite, pour $x \geqslant 0$, on pose $X = \sqrt{x}$ de sorte que (E_6) se réécrit $X^2 - X - 2 \geqslant 0$.

Le discriminant de $X^2 - X - 2$ est $\Delta = (-1)^2 - 4 \times 1 \times (-2) = 9 > 0$ donc l'équation $X^2 - X - 2 = 0$ possède deux solutions réelles :

$$X_1 = \frac{-(-1)-\sqrt{9}}{2\times 1} = \frac{1-3}{2} = -1 \qquad \text{et} \qquad X_2 = \frac{-(-1)+\sqrt{9}}{2\times 1} = \frac{1+3}{2} = 2$$

donc, comme $a = 1 > 0$, $X^2 - X - 2 \geqslant 0$ si et seulement si $X \in \left]-\infty\,;-1\right] \cup \left[2\,;+\infty\right[$. Il s'ensuit que

$$(E_6) \iff \sqrt{x} \leqslant -1 \text{ ou } \sqrt{x} \geqslant 2 \iff x \geqslant 4$$

car $\sqrt{x} \geqslant 0$.

On conclut que $\boxed{\text{l'ensemble des solutions de } (E_6) \text{ est } \left[4\,;+\infty\right[}$.