Feuille de calcul n°5 — Inéquations du premier degré, inéquations « produit », inéquations « quotient » — Corrigé

Exercice 1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes d'inconnue x.

$$(E_1) : \ -5x+2 \geqslant 0 \qquad (E_2) : \ -4x-3 \leqslant 0 \qquad (E_3) : \frac{7x+5}{5} \leqslant 0$$

$$(E_4) : \frac{-4x}{3} - \frac{1}{4} > 0 \qquad (E_5) : \frac{1-3x}{5} < 0 \qquad (E_6) : \frac{3}{4} - \frac{x}{7} \leqslant 0$$

Solution.

D'après le cours, comme $-5 < 0$, $\boxed{\text{l'ensemble des solutions de } (E_1) \text{ est } \left]-\infty\,;\frac{2}{5}\right]}$ et, de même, comme $-4 < 0$, $\boxed{\text{l'ensemble des solutions de } (E_2) \text{ est } \left[-\frac{3}{4}\,;+\infty\right[}$.

Comme $5 > 0$, (E_3) équivaut à $7x+5 \leqslant 0$ donc $\boxed{\text{l'ensemble des solutions de } (E_3) \text{ est } \left]-\infty\,;-\frac{5}{7}\right]}$.

$$(E_4) \iff \frac{-16x+3}{12} > 0 \underset{12>0}{\iff} -16x+3 > 0$$

donc $\boxed{\text{l'ensemble des solutions de } (E_4) \text{ est } \left]-\infty\,;\frac{3}{16}\right[}$.

Comme $5 > 0$, (E_5) équivaut à $1-3x < 0$ donc $\boxed{\text{l'ensemble des solutions de } (E_5) \text{ est } \left]\frac{1}{3}\,;+\infty\right[}$.

$$(E_6) \iff \frac{21-4x}{28} \leqslant 0 \underset{28>0}{\iff} 21-4x \leqslant 0$$

donc $\boxed{\text{l'ensemble des solutions de } (E_6) \text{ est } \left[\frac{21}{4}\,;+\infty\right[}$.

Exercice 2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes d'inconnue x.

$$(E_1) : 5x+2 < -3x+4 \qquad (E_2) : \ -7x-8 > 5x-6$$

$$(E_3) : 3(x-1) \leqslant 1-2x \qquad (E_4) : \frac{x}{2} - \frac{4-x}{4} > 5.$$

Solution.

$$(E_1) \iff 5x+3x < 4-2 \iff 8x < 2 \underset{8>0}{\iff} x < \frac{1}{4}$$

donc $\boxed{\text{l'ensemble des solutions de } (E_1) \text{ est } \left]-\infty\,;\frac{1}{4}\right[}$.

$$(E_2) \iff -7x-5x > -6+8 \iff -12x > 2 \underset{-12<0}{\iff} x < \frac{2}{-12} \iff x < -\frac{1}{6}$$

donc $\boxed{\text{l'ensemble des solutions de } (E_2) \text{ est } \left]-\infty\,;-\frac{1}{6}\right[}$.

$$(E_3) \iff 3x-3 \leqslant 1-2x \iff 5x \leqslant 4 \underset{5>0}{\iff} x \leqslant \frac{4}{5}$$

donc $\boxed{\text{l'ensemble des solutions de } (E_3) \text{ est } \left]-\infty\,;\frac{4}{5}\right]}$.

$$(E_4) \iff \frac{2x-(4-x)}{4} > 5 \underset{4>0}{\iff} 2x-4+x > 20 \iff 3x > 24 \underset{3>0}{\iff} x > 8$$

donc $\boxed{\text{l'ensemble des solutions de } (E_4) \text{ est } [8\,;+\infty[}$.

Exercice 3. Étudier le signe des expressions suivantes en fonction de x.

1. $A(x) = (3x+7)(x+5)$

2. $B(x) = (3x+7)(x^2+5)$

3. $C(x) = (x+2)^2 - (1-3x)^2$

4. $D(x) = (4x+2)(1-6x) + (4x+2)(3x-7)$

5. $E(x) = (3-6x)(1-x) + (2x-1)(9-5x)$.

Solution.

1. On utilise un tableau de signe :

x	$-\infty$		-5		$-\frac{7}{3}$		$+\infty$
signe de $3x+7$		$-$		$-$	0	$+$	
signe de $x+5$		$-$	0	$+$		$+$	
signe de $A(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Ainsi, $\boxed{A(x) \geqslant 0 \text{ pour tout } x \in \left]-\infty\,;-5\right] \cup \left[-\frac{7}{3}\,;+\infty\right[\text{ et } A(x) \leqslant 0 \text{ pour tout } x \in \left[-5\,;-\frac{7}{3}\right]}$.

2. Pour tout réel x, $x^2+5>0$ donc le signe de $B(x)$ est le signe de $3x+7$. Il s'ensuit que $\boxed{B(x) \leqslant 0 \text{ pour tout } x \in \left]-\infty\,;-\frac{7}{3}\right] \text{ et } B(x) \geqslant 0 \text{ pour tout } x \in \left[-\frac{7}{3}\,;+\infty\right[}$.

3. Pour tout réel x,

$$\begin{aligned} C(x) &= \left[(x+2)-(1-3x)\right]\left[(x+2)+(1-3x)\right] = (x+2-1+3x)(x+2+1-3x) \\ &= (4x+1)(-2x+3) \end{aligned}$$

On utilise ensuite un tableau de signe :

x	$-\infty$		$-\frac{1}{4}$		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
signe de $4x+1$		$-$	0	$+$		$+$	
signe de $-2x+3$		$+$		$+$	0	$+$	
signe de $C(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Ainsi, $\boxed{C(x) \leqslant 0 \text{ pour tout } x \in \left]-\infty\,;-\frac{1}{4}\right] \cup \left[\frac{3}{2}\,;+\infty\right[\text{ et } C(x) \geqslant 0 \text{ pour tout } x \in \left[-\frac{1}{4}\,;\frac{3}{2}\right]}$.

4. Pour tout réel x,

$$D(x) = (4x+2)\left[(1-6x)+(3x-7)\right] = (4x+2)(-3x-6)$$

On utilise ensuite un tableau de signe :

x	$-\infty$		-2		$-\frac{1}{2}$		$+\infty$
signe de $4x+2$		$-$		$-$	0	$+$	
signe de $-3x-6$		$+$	0	$-$		$-$	
signe de $D(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Ainsi, $\boxed{D(x) \leqslant 0 \text{ pour tout } x \in \left]-\infty\,;-2\right] \cup \left[-\frac{1}{2}\,;+\infty\right[\text{ et } D(x) \geqslant 0 \text{ pour tout } x \in \left[-2\,;-\frac{1}{2}\right]}$.

5. Pour tout réel x,

$$\begin{aligned} E(x) &= -3(2x-1)(1-x) + (2x-1)(9-5x) = (2x-1)\left[-3(1-x) + (9-5x)\right] \\ &= (2x-1)(-3+3x+9-5x) = (2x-1)(-2x+6) \end{aligned}$$

On utilise ensuite un tableau de signe :

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		3		$+\infty$
signe de $2x-1$		$-$	0	$+$		$+$	
signe de $-2x+6$		$+$		$+$	0	$-$	
signe de $E(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Ainsi, $\boxed{E(x) \leqslant 0 \text{ pour tout } x \in \left]-\infty\,;\frac{1}{2}\right] \cup \left[3\,;+\infty\right[\text{ et } E(x) \geqslant 0 \text{ pour tout } x \in \left[\frac{1}{2}\,;3\right]}$.

Exercice 4. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes d'inconnue x.

$(E_1) : (2x-5)(3-4x) > 0$

$(E_2) : (1-4x)(3x+2) \leqslant 0$

$(E_3) : x(x+1)(x-3) > 0$

$(E_4) : (x+1)(2x-5) > (x+1)(3-2x)$

$(E_5) : (3x+1)^2 \geqslant (x-3)^2$

$(E_6) : (4x-6)(2x+7) \geqslant (2x-3)(x+2)$

Solution.

• Pour résoudre (E_1), on utilise un tableau de signe :

x	$-\infty$		$\frac{3}{4}$		$\frac{5}{2}$		$+\infty$
signe de $2x-5$		$-$		$-$	0	$+$	
signe de $3-4x$		$+$	0	$-$		$-$	
signe de $(2x-5)(3-4x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Ainsi, $\boxed{\text{l'ensemble des solutions de } (E_1) \text{ est } \left]\frac{3}{4}\,;\frac{5}{2}\right[.}$

• Pour résoudre (E_2), on utilise un tableau de signe :

x	$-\infty$		$-\frac{2}{3}$		$\frac{1}{4}$		$+\infty$
signe de $1-4x$		$+$		$+$	0	$-$	
signe de $3x+2$		$-$	0	$+$		$+$	
signe de $(1-4x)(3x+2)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Ainsi, $\boxed{\text{l'ensemble des solutions de } (E_1) \text{ est } \left]-\infty\,;-\frac{2}{3}\right] \cup \left[\frac{1}{4}\,;+\infty\right[.}$

- Pour résoudre (E_3), on utilise un tableau de signe :

x	$-\infty$		-1		0		3		$+\infty$
signe de x		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
signe de $x+1$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
signe de $x-3$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
signe de $x(x+)(x-3)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Ainsi, $\boxed{\text{l'ensemble des solutions de } (E_3) \text{ est }]-1\,;0[\,\cup\,]3\,;+\infty[}$.

- $(E_4) \iff (x+1)(2x-5)-(x+1)(3-2x) > 0 \iff (x+1)[(2x-5)-(3-2x)] > 0$
$\iff (x+1)(4x-8) > 0.$

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
signe de $x+1$		$-$	0	$+$		$+$	
signe de $4x-8$		$-$		$-$	0	$+$	
signe de $(x+1)(4x-8)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Ainsi, $\boxed{\text{l'ensemble des solutions de } (E_4) \text{ est }]-\infty\,;-1[\,\cup\,]2\,;+\infty[.}$

- $(E_5) \iff (3x+1)^2-(x-3)^2 \geqslant 0 \iff [(3x+1)-(x-3)][(3x+1)+(x-3)] \geqslant 0$
$\iff (2x+4)(4x-2) \geqslant 0.$

x	$-\infty$		-2		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
signe de $2x+4$		$-$	0	$+$		$+$	
signe de $4x-2$		$-$		$-$	0	$+$	
signe de $(2x+4)(4x-2)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Ainsi, $\boxed{\text{l'ensemble des solutions de } (E_5) \text{ est }]-\infty\,;-2] \cup \left[\frac{1}{2}\,;+\infty\right[.}$

- $(E_6) \iff 2(2x-3)(2x+7)-(2x-3)(x+2) \geqslant 0 \iff (2x-3)\,[2(2x+7)-(x+2)] \geqslant 0$
$\iff (2x-3)(3x+12) \geqslant 0.$

x	$-\infty$		-4		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
signe de $2x-3$		$-$		$-$	0	$+$	
signe de $3x+12$		$-$	0	$+$	0	$+$	
signe de $(2x-3)(3x+12)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Ainsi, $\boxed{\text{l'ensemble des solutions } (E_6) \text{ est }]-\infty\,;-4] \cup \left[\frac{3}{2}\,;+\infty\right[}$.

Exercice 5. Étudier, en fonction de x, le signe des expressions suivantes.

1. $A(x) = \dfrac{x+7}{x-3}$
2. $B(x) = \dfrac{x}{x^2+4}$
3. $C(x) = \dfrac{x}{x+4} - 2$
4. $D(x) = 1 - \dfrac{3-x}{7x+2}$

Solution.

1. Pour le signe de $A(x)$, on utilise un tableau de signe :

x	$-\infty$		-7		3		$+\infty$
signe de $x+7$		$-$	0	$+$		$+$	
signe de $x-3$		$-$		$-$	0	$+$	
signe de $A(x)$		$+$	0	$-$	$\|\|$	$+$	

Ainsi, $\boxed{A(x) \leqslant 0 \text{ pour tout } x \in]-\infty\,;-7] \cup]3\,;+\infty[\text{ et } A(x) \geqslant 0 \text{ pour tout } x \in [-7\,;3[}$.

2. Pour tout réel x, $x^2+4 > 0$ donc le signe de $B(x)$ est le signe de x. On en déduit que $\boxed{B(x) \leqslant 0 \text{ si } x \in]-\infty\,;0] \text{ et } B(x) \geqslant 0 \text{ si } x \in [0\,;+\infty[}$.

3. Pour tout réel x, $C(x) = \dfrac{x-2(x+4)}{x+4} = \dfrac{x-2x-8}{x+4} = \dfrac{-x-8}{x+4}$. On utilise ensuite un tableau de signe :

x	$-\infty$		-8		-4		$+\infty$
signe de $-x-8$		$+$	0	$-$		$-$	
signe de $x+4$		$-$		$-$	0	$+$	
signe de $C(x)$		$-$	0	$+$	$\|\|$	$-$	

Ainsi, $\boxed{C(x) \leqslant 0 \text{ pour tout } x \in]-\infty\,;-8] \cup]-4\,;+\infty[\text{ et } C(x) \geqslant 0 \text{ pour tout } x \in [-8\,;-4[}$.

4. Pour tout réel x, $D(x) = \dfrac{7x+2-(3-x)}{7x+2} = \dfrac{7x+2-3+x}{7x+2} = \dfrac{8x-1}{7x+2}$. On utilise ensuite un tableau de signe :

x	$-\infty$		$-\frac{2}{7}$		$\frac{1}{8}$		$+\infty$
signe de $8x-1$		$-$		$-$	0	$+$	
signe de $7x+2$		$-$	0	$+$		$+$	
signe de $D(x)$		$+$	$\|$	$-$	0	$+$	

Ainsi, $\boxed{D(x) \geqslant 0 \text{ pour tout } x \in \left]-\infty\,;-\frac{2}{7}\right[\cup \left[\frac{1}{8}\,;+\infty\right[\text{ et } D(x) \leqslant 0 \text{ pour tout } x \in \left]-\frac{2}{7}\,;\frac{1}{8}\right]}$.

Exercice 6. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes d'inconnue x.

$$(E_1) : \frac{2x+1}{-x+5} > 0 \qquad (E_2) : \frac{3x-6}{3-x} \leqslant 0$$

$$(E_3) : \frac{3x+1}{2-x} \leqslant 3 \qquad (E_4) : \frac{x+1}{1-2x} < 1$$

Solution.

• On utilise un tableau de signe :

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		5		$+\infty$
signe de $2x+1$		$-$	0	$+$		$+$	
signe de $-x+5$		$+$		$+$	0	$-$	
signe de $\dfrac{2x+1}{-x+5}$		$-$	0	$+$	$\|$	$-$	

Ainsi, $\boxed{\text{l'ensemble des solutions de } (E_1) \text{ est } \left]-\frac{1}{2}\,;5\right[}$.

• On utilise un tableau de signe :

x	$-\infty$		2		3		$+\infty$
signe de $3x-6$		$-$	0	$+$		$+$	
signe de $3-x$		$+$		$+$	0	$-$	
signe de $\dfrac{3x-6}{3-x}$		$-$	0	$+$	$\|$	$-$	

Ainsi, $\boxed{\text{l'ensemble des solutions de } (E_1) \text{ est }]-\infty\,;2] \cup]3\,;+\infty[}$.

• $(E_3) \iff \dfrac{3x+1}{2-x} - 3 \leqslant 0 \iff \dfrac{3x+1-3(2-x)}{2-x} \leqslant 0 \iff \dfrac{6x-5}{2-x} \leqslant 0.$

On utilise un tableau de signe :

x	$-\infty$		$\frac{5}{6}$		2		$+\infty$
signe de $6x-5$		$-$	0	$+$		$+$	
signe de $2-x$		$+$		$+$	0	$-$	
signe de $\dfrac{6x-5}{2-x}$		$-$	0	$+$	$\|$	$-$	

Ainsi, $\boxed{\text{l'ensemble des solutions de } (E_1) \text{ est } \left]-\infty\,;\frac{5}{6}\right] \cup \left]2\,;+\infty\right[}$.

• $(E_4) \iff \dfrac{x+1}{1-2x} - 1 < 0 \iff \dfrac{x+1-(1-2x)}{1-2x} < 0 \iff \dfrac{3x}{1-2x} < 0.$
On utilise un tableau de signe :

x	$-\infty$		0		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
signe de $3x$		$-$	0	$+$		$+$	
signe de $1-2x$		$+$		$+$	0	$-$	
signe de $\dfrac{3x}{1-2x}$		$-$	0	$+$	$\|$	$-$	

Ainsi, $\boxed{\text{l'ensemble des solutions de } (E_1) \text{ est } \left]-\infty\,;0\right[\cup \left]\frac{1}{2}\,;+\infty\right[}$.