Feuille de calcul n°4 — Équations du premier degré, équations « produit », équations « quotient »

Exercice 1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes d'inconnue x.

$(E_1) : x+3=2$ $(E_2) : -5+x=4$ $(E_3) : 3x=2$

$(E_4) : -5x=4$ $(E_5) : -4x=-10$ $(E_6) : 3-x=-8$

$(E_7) : 2x+4=5x-7$ $(E_8) : 2x+3=4x+7$ $(E_9) : \frac{2}{3}x-5=\frac{1}{2}-3$

Solution.

$(E_1) \iff x=-1$

$\boxed{\text{L'ensemble des solutions de } (E_1) \text{ est } \{-1\}.}$

$(E_2) \iff x=9$

$\boxed{\text{L'ensemble des solutions de } (E_2) \text{ est } \{9\}.}$

$(E_3) \iff x=\frac{2}{3}$

$\boxed{\text{L'ensemble des solutions de } (E_3) \text{ est } \left\{\frac{2}{3}\right\}.}$

$(E_4) \iff x=-\frac{4}{5}$

$\boxed{\text{L'ensemble des solutions de } (E_4) \text{ est } \left\{-\frac{4}{5}\right\}.}$

$(E_5) \iff x=\frac{-10}{-4} \iff x=\frac{5}{2}$

$\boxed{\text{L'ensemble des solutions de } (E_5) \text{ est } \left\{\frac{5}{2}\right\}.}$

$(E_6) \iff 11=x$

$\boxed{\text{L'ensemble des solutions de } (E_6) \text{ est } \{11\}.}$

$(E_7) \iff 11=3x \iff \frac{11}{3}=x$

$\boxed{\text{L'ensemble des solutions de } (E_7) \text{ est } \left\{\frac{11}{3}\right\}.}$

$(E_8) \iff -4=2x \iff -2=x$

$\boxed{\text{L'ensemble des solutions de } (E_8) \text{ est } \{-2\}.}$

$(E_9) \iff \dfrac{2}{3}x = \dfrac{1}{2} + 2 \iff \dfrac{2}{3}x = \dfrac{5}{2} \iff x = \dfrac{5}{2} \times \dfrac{3}{2} \iff x = \dfrac{15}{4}$

$\boxed{\text{L'ensemble des solutions de } (E_9) \text{ est } \left\{\dfrac{15}{4}\right\}.}$

Exercice 2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes d'inconnue x.

$(E_1) : x + 4 = x - 7$ $\quad (E_2) : 2x + 5 = 2(x + 2) + 1$ $\quad (E_3) : 2x + 3 = 4x + 6$

$(E_4) : 13 + \dfrac{3}{2}x = 1$ $\quad (E_5) : 4x + \dfrac{1}{3} = \dfrac{1}{2}x + 2$ $\quad (E_6) : \dfrac{3}{2}x + \dfrac{1}{4} = \dfrac{7}{4}$

$(E_7) : \dfrac{x-3}{5} = \dfrac{5}{8}$ $\quad (E_8) : \dfrac{2x-3}{7} = \dfrac{x-1}{3}$ $\quad (E_9) : \dfrac{x+1}{2} - \dfrac{3-x}{3} = \dfrac{2-5x}{5}$

Solution.

$(E_1) \iff 4 = -7$

$\boxed{\text{L'ensemble des solutions de } (E_1) \text{ est } \varnothing.}$

$(E_2) \iff 2x + 5 = 2x + 5$

$\boxed{\text{L'ensemble des solutions de } (E_2) \text{ est } \mathbb{R}.}$

$(E_3) \iff -3 = 2x \iff \dfrac{-3}{2} = x$

$\boxed{\text{L'ensemble des solutions de } (E_3) \text{ est } \left\{-\dfrac{3}{2}\right\}.}$

$(E_4) \iff \dfrac{3}{2}x = -12 \iff x = -12 \times \dfrac{2}{3} \iff x = -8$

$\boxed{\text{L'ensemble des solutions de } (E_4) \text{ est } \{-8\}.}$

$(E_5) \iff 4x - \dfrac{1}{2}x = 2 - \dfrac{1}{3} \iff \dfrac{7}{2}x = \dfrac{5}{3} \iff x = \dfrac{5}{3} \times \dfrac{2}{7} \iff x = \dfrac{10}{21}$

$\boxed{\text{L'ensemble des solutions de } (E_5) \text{ est } \left\{\dfrac{10}{21}\right\}.}$

$(E_6) \iff \dfrac{3}{2}x = \dfrac{6}{4} \iff x = \dfrac{3}{2} \times \dfrac{2}{3} \iff x = 1$

$\boxed{\text{L'ensemble des solutions de } (E_6) \text{ est } \{1\}.}$

$(E_7) \iff 8(x-3) = 25 \iff 8x - 24 = 25 \iff 8x = 49 \iff x = \dfrac{49}{8}$

$\boxed{\text{L'ensemble des solutions de } (E_7) \text{ est } \left\{\dfrac{49}{8}\right\}.}$

$(E_8) \iff 3(2x-3) = 7(x-1) \iff 6x - 9 = 7x - 7 \iff -2 = x$

$\boxed{\text{L'ensemble des solutions de } (E_8) \text{ est } \{-2\}.}$

$$\begin{aligned}(E_9) &\iff 15(x+1) - 10(3-x) = 6(2-5x) \iff 15x + 15 - 30 + 10x = 12 - 30x \\ &\iff 55x = 27 \iff x = \dfrac{27}{55}\end{aligned}$$

$\boxed{\text{L'ensemble des solutions de } (E_9) \text{ est } \left\{\dfrac{27}{55}\right\}.}$

Exercice 3. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes d'inconnue x.

$(E_1) : x(x+1) = 4(x+1)$ $\qquad$ $(E_2) : 3x(1-3x) = 0$

$(E_3) : (x-5)(x-7) = (x-5)^2$ $\qquad$ $(E_4) : (2x-3)(5x+1)(5-2x) = 0$

$(E_5) : \left(\dfrac{2x-5}{3}\right)^2 \left(\dfrac{4x}{5} - \dfrac{3}{7}\right) = 0$ $\qquad$ $(E_6) : 9x^2 + 1 = 6x$

Solution.

$(E_1) \iff x(x+1) - 4(x+1) = 0 \iff (x+1)(x-4) = 0 \iff x = -1$ ou $x = 4$

L'ensemble des solutions de (E_1) est $\{-1\,;4\}$.

$(E_2) \iff 3x = 0$ ou $1 - 3x = 0 \iff x = 0$ ou $x = \dfrac{1}{3}$

L'ensemble des solutions de (E_2) est $\left\{0\,;\dfrac{1}{3}\right\}$.

$(E_3) \iff (x-5)(x-7) - (x-5)^2 = 0 \iff (x-5)\left[(x-7) - (x-5)\right] = 0$
$\iff (x-5)(-2) = 0 \iff x = 5$

L'ensemble des solutions de (E_3) est $\{5\}$.

$(E_4) \iff 2x - 3 = 0$ ou $5x + 1 = 0$ ou $5 - 2x = 0 \iff x = \dfrac{3}{2}$ ou $x = -\dfrac{1}{5}$ ou $x = \dfrac{5}{2}$

L'ensemble des solutions de (E_4) est $\left\{\dfrac{3}{2}\,;-\dfrac{1}{5}\,;\dfrac{5}{2}\right\}$.

$(E_5) \iff \dfrac{2x-5}{3} = 0$ ou $\dfrac{4x}{5} - \dfrac{3}{7} = 0 \iff x = \dfrac{5}{2}$ ou $x = \dfrac{3}{7} \times \dfrac{5}{4} \iff x = \dfrac{5}{2}$ ou $x = \dfrac{15}{28}$

L'ensemble des solutions de (E_5) est $\left\{\dfrac{5}{2}\,;\dfrac{15}{28}\right\}$.

$(E_6) \iff 9x^2 - 6x + 1 = 0 \iff (3x)^2 - 2 \times 2x \times 1 + 1^2 = 0 \iff (3x-1)^2 = 0$
$\iff 3x - 1 = 0 \iff x = \dfrac{1}{3}$

L'ensemble des solutions de (E_6) est $\left\{\dfrac{1}{3}\right\}$.

Exercice 4. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes d'inconnue x.

$(E_1) : x^4 - 1 = 0$ $\qquad$ $(E_2) : (2x+3)^2 - 2(2x+3) + 1 = 0$

$(E_3) : (3x-1)^3(x+3) = (3x-1)(x+3)^3$ $\qquad$ $(E_4) : x^2 + 2\sqrt{x^2+1} + 2 = 0$

Solution.

$(E_1) \iff (x^2)^2 - 1^2 = 0 \iff (x^2-1)(x^2+1) = 0 \iff (x-1)(x+1)(x^2+1) = 0$
$\iff x = 1$ ou $x = -1$
(car, pour tout réel x, $x^2 \geqslant 0$ donc $x^2 + 1 \geqslant 1$ et ainsi $x^2 + 1 \neq 0$).

L'ensemble des solutions de (E_1) est $\{1\,;-1\}$.

$(E_2) \iff \left[(2x+3) - 1\right]^2 = 0 \iff (2x+2)^2 = 0 \iff 2x + 2 = 0 \iff x = -1$

L'ensemble des solutions de (E_2) est $\{-1\}$.

$$
\begin{aligned}
(E_3) &\iff (3x-1)^3(x+3)-(3x-1)(x+3)^3=0\\
&\iff (3x-1)(x+3)\left[(3x-1)^2-(x+3)^2\right]=0\\
&\iff (3x-1)(x+3)\left[(3x-1)-(x+3)\right]\left[(3x-1)+(x+3)\right]=0\\
&\iff (3x-1)(x+3)(2x-4)(4x+2)=0\\
&\iff 3x-1=0 \text{ ou } x+3=0 \text{ ou } 2x-4=0 \text{ ou } 4x+2=0\\
&\iff x=\frac{1}{3} \text{ ou } x=-3 \text{ ou } x=2 \text{ ou } x=-\frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

$\boxed{\text{L'ensemble des solutions de } (E_3) \text{ est } \left\{\frac{1}{3}\,;-3\,;2\,;-\frac{1}{2}\right\}.}$

Pour tout réel x, $x^2 \geqslant 0$, $\sqrt{x^2+1} \geqslant 0$ donc $x^2+2\sqrt{x^2+1}+2 \geqslant 2$. En particulier, pour tout réel x, $x^2+2\sqrt{x^2+1}+2 \neq 0$ donc $\boxed{\text{L'ensemble des solutions de } (E_4) \text{ est } \varnothing.}$

Exercice 5. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes d'inconnue x.

$$(E_1) : (7-x)^2=(2x+1)^2 \qquad (E_2) : (3x-5)^2=\frac{25}{16}$$

$$(E_3) : x^2=49+(x-7)(x+1) \qquad (E_4) : 2-6x=(3x-1)(1-5x)$$

Solution.

$$
\begin{aligned}
(E_1) &\iff (7-x)^2-(2x+1)^2=0 \iff \left[(7-x)-(2x+1)\right]\left[(7-x)+(2x+1)\right]=0\\
&\iff (-3x+6)(x+8)=0 \iff -3x+6=0 \text{ ou } x+8=0 \iff x=2 \text{ ou } x=-8
\end{aligned}
$$

$\boxed{\text{L'ensemble des solutions de } (E_1) \text{ est } \{2\,;-8\}.}$

$$
\begin{aligned}
(E_2) &\iff (3x-5)^2-\left(\frac{5}{4}\right)^2=0 \iff \left(3x-5-\frac{5}{4}\right)\left(3x-5+\frac{5}{4}\right)=0\\
&\iff \left(3x-\frac{25}{4}\right)\left(3x-\frac{15}{4}\right)=0 \iff 3x-\frac{25}{4}=0 \text{ ou } 3x-\frac{15}{4}=0\\
&\iff x=\frac{25}{12} \text{ ou } x=\frac{5}{4}
\end{aligned}
$$

$\boxed{\text{L'ensemble des solutions de } (E_2) \text{ est } \left\{\frac{25}{12}\,;\frac{5}{4}\right\}.}$

$$
\begin{aligned}
(E_3) &\iff x^2-7-(x-7)(x+1)=0 \iff (x-7)(x+7)-(x-7)(x+1)=0\\
&\iff (x-7)\left[(x+7)-(x+1)\right]=0 \iff (x-7)\times 6=0 \iff x=7
\end{aligned}
$$

$\boxed{\text{L'ensemble des solutions de } (E_3) \text{ est } \{7\}.}$

$$
\begin{aligned}
(E_4) &\iff 0=(3x-1)(1-5x)+6x-2 \iff 0=(3x-1)(1-5x)+2(3x-1)\\
&\iff (3x-1)\left[(1-5x)+2\right]=0 \iff (3x-1)(3-5x)=0\\
&\iff 3x-1=0 \text{ ou } 3-5x=0 \iff x=\frac{1}{3} \text{ ou } x=\tfrac{3}{5}
\end{aligned}
$$

$\boxed{\text{L'ensemble des solutions de } (E_4) \text{ est } \left\{\frac{1}{3}\,;\frac{3}{5}\right\}.}$

Exercice 6. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes d'inconnue x.

$$(E_1) : \frac{1}{x+1}=0 \qquad (E_2) : \frac{x+1}{x+2}=0$$

$$(E_3) : \frac{3x-1}{4x+2}=\frac{1}{3} \qquad (E_4) : \frac{x^2-1}{x+1}+2=0$$

Solution.

Comme $1 \neq 0$, $\dfrac{1}{x+1} \neq 0$ pour tout réel x donc $\boxed{\text{l'ensemble des solutions de } (E_1) \text{ est } \varnothing}$.

(E_2) a un sens si et seulement si $x+2 \neq 0$ i.e. $x \neq -2$ et, pour tout réel $x \neq -2$,

$$(E_2) \iff x+1=0 \iff x=-1.$$

Ainsi, $\boxed{\text{l'ensemble des solutions de } (E_2) \text{ est } \{-1\}}$.

(E_3) a un sens si et seulement si $4x+2 \neq 0$ i.e. $x \neq -\dfrac{1}{2}$ et, pour tout réel $x \neq -\dfrac{1}{2}$,

$$(E_3) \iff 3(3x-1) = 1(4x+2) \iff 9x-3 = 4x+2 \iff 5x=5 \iff x=1.$$

Ainsi, $\boxed{\text{l'ensemble des solutions de } (E_3) \text{ est } \{1\}}$.

(E_4) a un sens si et seulement si $x+1 \neq 0$ i.e. $x \neq -1$ et, pour tout réel $x \neq -1$,

$$\begin{aligned}(E_4) &\iff \frac{x^2-1}{x+1} + \frac{2(x+1)}{x+1} = 0 \iff \frac{x^2-1+2x+2}{x+1} = 0 \iff \frac{x^2+2x+1}{x+1} = 0 \\ &\iff x^2+2x+1=0 \iff (x+1)^2=0 \iff x=-1.\end{aligned}$$

Ainsi, $\boxed{\text{l'ensemble des solutions de } (E_4) \text{ est } \varnothing}$.