Feuille de calcul n°2 — Opérations sur les puissances

Exercice 1. Effectuer les calculs suivants et, dans chaque cas, donner le résultat sous la forme d'un entier ou d'une fraction irréductible.

$$A = (-2)^3 \times 2^2 \qquad B = (-5)^2 \times (-5) \qquad C = \left(-\frac{2}{3}\right)^2 \times \left(-\frac{2}{3}\right)^3 \qquad D = \frac{3}{4} \times \left(\frac{3}{4}\right)^2$$

$$E = \frac{3^2}{5^2} \times \left(-\frac{2}{9}\right)^2 \qquad F = (2^2)^3 \qquad G = \left((-3)^2\right)^3 \qquad H = \left(\left(\frac{1}{2}\right)^2\right)^3.$$

Solution.
$A = -8 \times 4$ donc $\boxed{A = -32}$.
$B = 25 \times (-5)$ donc $\boxed{B = -125}$.
$C = \left(-\frac{2}{3}\right)^5 = \frac{(-2)^5}{3^5} = \frac{-32}{243}$ donc $\boxed{C = -\frac{32}{243}}$.
$D = \left(\frac{3}{4}\right)^4 = \frac{3^3}{4^3}$ donc $\boxed{D = \frac{27}{64}}$.
$E = \frac{9}{25} \times \frac{4}{9^2} = \frac{1}{25} \times \frac{4}{9}$ donc $\boxed{E = \frac{4}{225}}$.
$F = 2^6$ donc $\boxed{F = 64}$.
$G = 9^3$ donc $\boxed{G = 729}$.
$H = \left(\frac{1}{2}\right)^6 = \frac{1^6}{2^6}$ donc $\boxed{H = \frac{1}{64}}$.

Exercice 2. Soit a un réel non nul. Effectuer les calculs suivants en donner, dans chaque cas, le résultat sous la forme a^n ou $\frac{1}{a^n}$ avec $n \in \mathbb{N}$.

$$A = a^2 \times a^4 \qquad B = a^4 \times a^3 \qquad C = a^5 \times a \qquad D = -a^3 \times (-a)^5$$

$$E = a^3 \times a^{-5} \qquad F = a^{-2} \times a^{-3} \qquad G = a^{-2} \times a^4 \qquad H = a^2 \times a^{-1}$$

Solution.
$A = a^{2+4}$ donc $\boxed{A = a^6}$.
$B = a^{4+3}$ donc $\boxed{B = a^7}$.
$C = a^{5+1}$ donc $\boxed{C = a^6}$.
$D = -a^3 \times (-1 \times a)^5 = -a^3 \times (-1)^5 \times a^5 = -a^3 \times (-1) \times a^5 = a^{3+5}$ donc $\boxed{D = a^8}$.
$E = a^{3-5} = a^{-2}$ donc $\boxed{E = \frac{1}{a^2}}$.
$F = a^{-2-3} = a^{-5}$ donc $\boxed{F = \frac{1}{a^5}}$.
$G = a^{-2+4}$ donc $\boxed{G = a^2}$.
$H = a^{2-1}$ donc $\boxed{H = a}$.

Exercice 3. Soit a un réel non nul. Écrire chacun des nombres suivants sous la forme a^n, $-a^n$ ou $\frac{1}{a^n}$ avec $n \in \mathbb{N}$.

$$A = \frac{(-a)^5}{a^3} \qquad B = \frac{(-a)^6}{(-a)^3} \qquad C = \frac{(-a)^9}{-a} \qquad D = \frac{(-a)^{2023}}{a}$$
$$E = \frac{a^3}{a^{-5}} \qquad F = \frac{a^{-4}}{a^{-2}} \qquad G = \frac{a^4}{a^{-3}} \qquad H = \frac{a^{-3}}{a^{-4}}.$$

Solution.

$A = \dfrac{(-1 \times a)^5}{a^3} = \dfrac{(-1)^5 \times a^5}{a^3} = -a^{5-3}$ donc $\boxed{A = -a^2}$.

$B = \dfrac{(-1)^6 \times a^6}{(-1)^3 \times a^3} = \dfrac{a^6}{-a^3} = -a^{6-3}$ donc $\boxed{B = -a^3}$.

$C = \dfrac{(-1)^9 a^9}{-a} = \dfrac{-a^9}{-a} = a^{9-1}$ donc $\boxed{C = a^8}$.

$D = \dfrac{(-1)^{2023} a^{2023}}{a} = \dfrac{-a^{2023}}{a} = -a^{2023-1}$ donc $\boxed{D = -a^{2022}}$.

$E = a^{3+5}$ donc $\boxed{E = a^8}$.

$F = a^{-4+2} = a^{-2}$ donc $\boxed{F = \frac{1}{a^2}}$.

$G = a^{4+3}$ donc $\boxed{G = a^7}$.

$H = a^{-3+4}$ donc $\boxed{H = a}$.

Exercice 4. Effectuer les calculs suivants et donner, dans chaque cas, le résultat sous la forme d'un entier ou d'une fraction irréductible.

$$A = \frac{1}{(-2)^{-1}} \qquad B = -\frac{1}{5^{-1}} \qquad C = -\frac{1}{6^{-3}} \qquad D = \frac{1}{6^3} \qquad E = 10^{-5} \times 10^3$$

$$F = (-1)^3 \times 2^{-2} \times 3^2 \qquad G = (-3)^{-1} \times 6^2 \times 4^{-2} \qquad H = \left(\frac{3}{2}\right)^{-1} \times (-1)^2 \times \left(\frac{3}{4}\right)^3$$

Solution.

$A = (-2)^1$ donc $\boxed{A = -2}$.

$B = -5^1$ donc $\boxed{B = -5}$.

$C = -6^3$ donc $\boxed{C = -216}$.

$\boxed{D = \dfrac{1}{216}}$.

$E = 10^{-2} = \dfrac{1}{10^2}$ donc $\boxed{E = \dfrac{1}{100}}$.

$F = -1 \times \dfrac{1}{2^2} \times 9$ donc $\boxed{F = -\dfrac{9}{4}}$.

$G = -\dfrac{6^2}{3 \times 4^2} = -\dfrac{6^2}{6 \times 2 \times 4} = -\dfrac{6}{8}$ donc $\boxed{G = -\dfrac{3}{4}}$.

$H = \dfrac{2}{3} \times 1 \times \dfrac{3^3}{4^3} = \dfrac{3^2}{2 \times 4^2}$ donc $\boxed{H = \dfrac{9}{32}}$.

Exercice 5. Soit $n \in \mathbb{N}$. Effectuer les calculs suivants et donner, dans chaque cas, le résultat sous la forme d'un entier ou d'une fraction irréductible.

$$A = \frac{4^3}{2^8} \qquad B = \frac{25^3}{(-5)^6} \qquad C = \frac{9^{-1}}{3^{-2}} \qquad D = \frac{4^{65}}{2^{138}}$$
$$E = \frac{8^{-5}}{64^{-3}} \qquad F = \frac{9^{-4027}}{81^{-2014}} \qquad G = \frac{2^{2n}}{4^n} \qquad H = \frac{3^{3n}}{27^{n+1}}$$

Solution.

$A = \dfrac{(2^2)^3}{2^8} = \dfrac{2^6}{2^8} = 2^{6-8} = 2^{-2}$ donc $\boxed{A = \dfrac{1}{4}}$.

$B = \dfrac{(5^2)^3}{(-1)^6 \times 5^6} = \dfrac{5^6}{5^6}$ donc $\boxed{B = 1}$.

$C = \dfrac{9^{-1}}{3^{-2}} = \dfrac{3^2}{9^1} = \dfrac{9}{9}$ donc $\boxed{C = 1}$.

$D = \dfrac{4^{65}}{2^{138}} = \dfrac{(2^2)^{65}}{2^{138}} = \dfrac{2^{130}}{2^{138}} = \dfrac{1}{2^8}$ donc $\boxed{D = \dfrac{1}{256}}$

$E = \dfrac{64^3}{8^5} = \dfrac{(8^2)^3}{8^5} = \dfrac{8^6}{8^5} = 8^{6-5}$ donc $\boxed{E = 8}$.

$F = \dfrac{81^{2014}}{9^{4027}} = \dfrac{(9^2)^{2014}}{9^{4027}} = \dfrac{9^{4028}}{9^{4027}} = 9^{4028-4027}$ donc $\boxed{F = 9}$.

$G = \dfrac{(2^2)^n}{4^n} = \dfrac{4^n}{4^n}$ $\boxed{G = 1}$.

$H = \dfrac{(3^3)^n}{27^{n+1}} = \dfrac{27^n}{27^n \times 27}$ donc $\boxed{H = \dfrac{1}{27}}$.

Exercice 6. Soit a et b des réels strictement positifs. Écrire chacun des nombres suivants sous la forme $a^n b^m$ avec $n \in \mathbb{Z}$ et $m \in \mathbb{Z}$.

$$A = \frac{ab^3}{a^2b} \qquad B = \frac{\frac{a^2}{b^3}}{\frac{b^2}{a^3}} \qquad C = \left(\frac{a}{a^{-2}b^4}\right)^4 \times \frac{b^{-6}}{(ab^{-1})^3} \qquad D = \frac{a^{-1}}{a^2b^5} \times \frac{(a^3)^{-1}b}{b^{-3}a^5}.$$

Solution.

$A = \dfrac{ab^3}{a^2b} = a^{1-2}b^{3-1}$ donc $\boxed{A = a^{-1}b^2}$

$B = \dfrac{a^2}{b^3} \times \dfrac{a^3}{b^2} = \dfrac{a^5}{b^5}$ donc $\boxed{B = a^5b^{-5}}$.

$C = \dfrac{a^4}{(a^{-2}b^4)^4} \times \dfrac{b^{-6}}{a^3b^{-3}} = \dfrac{a^4}{a^{-8}b^{16}} \times \dfrac{b^{-6}}{a^3b^{-3}} = a^{4+8-3}b^{-6-16+3}$ donc $\boxed{C = a^9b^{-19}}$.

$D = \dfrac{a^{-1}}{a^2b^5} \times \dfrac{a^{-3}b}{b^{-3}a^5} = a^{-1-2-3-5}b^{-5+1+3}$ donc $\boxed{D = a^{-11}b^{-1}}$.