

Feuille de calcul n°28 — Primitives et intégrales — Correction

Exercice 1. Dans chaque cas, déterminer une primitive F de f sur I .

1. $f : x \mapsto x^3, I = \mathbb{R}$
2. $f : x \mapsto 2x^5, I = \mathbb{R}$
3. $f : x \mapsto x^2 + 2x - 3, I = \mathbb{R}$
4. $f : x \mapsto \frac{1}{x^2} - x^2, I = \mathbb{R}_+^*$
5. $f : x \mapsto -\frac{4}{3x^5}, I = \mathbb{R}_+^*$
6. $f : x \mapsto x + \frac{1}{\sqrt{x}}, I = \mathbb{R}_+^*$

Solution.

1. $F : x \mapsto \frac{x^4}{4}.$
2. $F : x \mapsto \frac{x^6}{3}.$
3. $F : x \mapsto \frac{x^3}{3} + x^2 - 3x.$
4. $F : x \mapsto -\frac{1}{x} - \frac{x^3}{3}.$
5. $F : x \mapsto \frac{1}{3x^4}.$
6. $F : x \mapsto \frac{x^2}{2} + 2\sqrt{x}.$

Exercice 2. Dans chaque cas, déterminer une primitive F de f sur I .

1. $f : x \mapsto (3x + 1)^4, I = \mathbb{R}$
2. $f : x \mapsto (2x + 7)^6, I = \mathbb{R}$
3. $f : x \mapsto \frac{1}{x^2} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^4, I = \mathbb{R}_+^*$
4. $f : x \mapsto \frac{6x}{(2x^2 + 1)^2}, I = \mathbb{R}$
5. $f : x \mapsto \frac{e^x}{(e^x + 3)^4}, I = \mathbb{R}$
6. $f : x \mapsto \frac{x + 1}{(x^2 + 2x + 3)^4}, I = \mathbb{R}$
7. $f : x \mapsto \frac{e^x}{e^x + 1}, I = \mathbb{R}$
8. $f : x \mapsto \frac{x}{1 + x^2}, I = \mathbb{R}$
9. $f : x \mapsto \frac{1}{x \ln(x)}, I =]1; +\infty[$
10. $f : x \mapsto e^{2x}, I = \mathbb{R}$
11. $f : x \mapsto e^{-x}, I = \mathbb{R}$
12. $f : x \mapsto \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}, I = \mathbb{R}_+^*$

Solution.

1. Pour tout réel x , $f(x) = \frac{1}{3} \times \underbrace{3(3x + 1)^4}_{u'(x)u(x)^4}$ donc $F : x \mapsto \frac{1}{3} \times \frac{1}{5}(3x + 1)^5$ c'est-à-dire
 $F : x \mapsto \frac{1}{15}(3x + 1)^5$ est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.
2. Pour tout réel x , $f(x) = \frac{1}{2} \times \underbrace{2(2x + 7)^6}_{u'(x)u(x)^n}$ donc $F : x \mapsto \frac{1}{2} \times \frac{1}{7}(2x + 7)^7$ c'est-à-dire
 $F : x \mapsto \frac{1}{14}(2x + 7)^7$ est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

3. Pour tout réel $x > 0$, $f(x) = - \underbrace{\left(-\frac{1}{x^2}\right) \times \left(1 + \frac{1}{x}\right)^4}_{u'(x)u(x)^n}$ donc $F : x \mapsto -\frac{1}{5} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^5$ est une primitive de f sur $\mathbb{R}_+^*$.

4. Pour tout réel x , $f(x) = \frac{3}{2} \times \frac{4x}{\underbrace{(2x^2 + 1)^2}_{\frac{u'(x)}{u(x)^n}}}$ donc $F : x \mapsto \frac{3}{2} \times \left(-\frac{1}{2x^2 + 1}\right)$ c'est-à-dire $F : x \mapsto -\frac{3}{2(2x^2 + 1)}$ est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

5. Pour tout réel x , $f(x) = \frac{e^x}{\underbrace{(e^x + 3)^4}_{\frac{u'(x)}{u(x)^n}}}$ donc $F : x \mapsto -\frac{1}{3(e^x + 3)^3}$ est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

6. Pour tout réel x , $f(x) = \frac{1}{2} \frac{2x + 2}{\underbrace{(x^2 + 2x + 3)^4}_{\frac{u'(x)}{u(x)^n}}}$ donc $F : x \mapsto \frac{1}{2} \times \left(-\frac{1}{3(x^2 + 2x + 3)^3}\right)$ i.e. $F : x \mapsto -\frac{1}{6(x^2 + 2x + 3)^3}$ est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

7. Pour tout réel x , $f(x) = \frac{e^x}{\underbrace{e^x + 1}_{\frac{u'(x)}{u(x)}}}$ donc, étant donné que $e^x + 1 > 0$ pour tout réel x , $F : x \mapsto \ln(e^x + 1)$ est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

8. Pour tout réel x , $f(x) = \frac{1}{2} \times \frac{2x}{\underbrace{1 + x^2}_{\frac{u'(x)}{u(x)}}}$ donc, étant donné que $1 + x^2 > 0$ pour tout réel x , $F : x \mapsto \frac{1}{2} \ln(1 + x^2)$ est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

9. Pour tout réel $x > 1$, $f(x) = \frac{\frac{1}{x}}{\underbrace{\ln(x)}_{\frac{u'(x)}{u(x)}}}$ donc, étant donné que $\ln(x) > 0$ pour tout réel $x > 1$, $F : x \mapsto \ln(\ln(x))$ est une primitive de f sur $]1; +\infty[$.

10. Pour tout réel x , $f(x) = \frac{1}{2} \times \frac{2e^{2x}}{\underbrace{u'(x)e^{u(x)}}_{u'(x)e^{u(x)}}}$ donc $F : x \mapsto \frac{1}{2} e^{2x}$ est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

11. Pour tout réel x , $f(x) = - \underbrace{\left(-e^{-x}\right)}_{u'(x)e^{u(x)}}$ donc $F : x \mapsto -e^{-x}$ est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

12. Pour tout réel $x > 0$, $f(x) = - \underbrace{\left(-\frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}}\right)}_{u'(x)e^{u(x)}}$ donc $F : x \mapsto -e^{\frac{1}{x}}$ est une primitive de f sur $\mathbb{R}_+^*$.

Exercice 3. Calculer les intégrales suivantes à l'aide d'une primitives.

$$\begin{array}{lll}
 1. I_1 = \int_0^1 3x^2 + x + 2 \, dx & 2. I_2 = \int_2^4 \frac{1}{t} \, dt & 3. I_3 = \int_1^2 x e^{x^2-1} \, dx \\
 4. I_4 = \int_3^4 \frac{u-1}{u^2-2u} \, du & 5. I_5 = \int_0^3 \frac{1}{\sqrt{t+1}} \, dt & 6. I_6 = \int_0^1 t^2 e^{-t^3} \, dt \\
 7. I_7 = \int_1^2 \frac{6}{s} + 3s + 4 \, ds & 8. I_8 = \int_1^2 \frac{3}{x^2} \, dx & 9. I_9 = \int_0^1 e^t + e^{-t} \, dt \\
 10. I_{10} = \int_0^1 \frac{1}{1+u^2} \, du & 11. I_{11} = \int_0^\pi \sin(t) \cos^2(t) \, dt & 12. I_{12} = \int_2^3 \frac{x}{(x^2-3)^3} \, dx
 \end{array}$$

Solution.

$$\begin{array}{l}
 1. I_1 = \left[x^3 + \frac{x^2}{2} + 2x \right]_0^1 = \frac{7}{2}. \\
 2. I_2 = [\ln(t)]_2^4 = \ln(4) - \ln(2) = \ln(2). \\
 3. I_3 = \frac{1}{2} \int_0^2 \underbrace{2x e^{x^2-1}}_{u'(x) e^{u(x)}} \, dx = \frac{1}{2} [e^{x^2-1}]_0^2 = \frac{e^3-1}{2} \\
 4. I_4 = \frac{1}{2} \int_3^4 \underbrace{\frac{2u-2}{u^2-2u}}_{\frac{v'(u)}{v(u)}} \, du = \frac{1}{2} [\ln(u^2-2u)]_3^4 = \frac{1}{2} (\ln(8) - \ln(3)) = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{8}{3}\right) \\
 5. I_5 = [2\sqrt{t+1}]_0^3 = 2\sqrt{4} - 2\sqrt{1} = 2 \\
 6. I_6 = -\frac{1}{3} \int_0^1 \underbrace{-3t^2 e^{-t^3}}_{u'(t) e^{u(t)}} \, dt = -\frac{1}{3} [e^{-t^3}]_0^1 = -\frac{e^{-1}-1}{3} = \frac{1-e^{-1}}{3} \\
 7. I_7 = \left[6\ln(s) + \frac{3}{2}s^2 + 4s \right]_1^2 = 6\ln(2) + 14 - \frac{11}{2} = 6\ln(2) + \frac{17}{2} \\
 8. I_8 = \left[-\frac{3}{x} \right]_1^2 = -\frac{3}{2} + 3 = \frac{3}{2} \\
 9. I_9 = [e^t - e^{-t}]_0^1 = e - e^{-1} - (1 - 1) = e - e^{-1}. \\
 10. I_{10} = [\arctan(u)]_0^1 = \arctan(1) - \arctan(0) = \frac{\pi}{4} - 0 = \frac{\pi}{4} \\
 11. I_{11} = -\int_0^\pi \underbrace{(-\sin(t)) \cos^2(t)}_{u'(t)u(t)^n} \, dt = -\left[\frac{\cos^3(t)}{3} \right]_0^\pi = -\left(\frac{(-1)^3}{3} - \frac{1}{3} \right) = \frac{2}{3} \\
 12. I_{12} = \frac{1}{2} \int_2^3 \underbrace{\frac{2x}{(x^2-3)^3}}_{\frac{u'(t)}{u(x)^3}} \, dx = \frac{1}{2} \left[-\frac{1}{2(x^2-3)^2} \right]_2^3 = \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{72} + \frac{1}{2} \right) = \frac{35}{144}
 \end{array}$$

Exercice 4. Calculer les intégrales suivantes à l'aide d'une intégration par parties.

$$1. I_1 = \int_0^1 (2x-4) e^x \, dx \quad 2. I_2 = \int_1^e \frac{\ln(t)}{t^2} \, dt \quad 3. I_3 = \int_0^1 \frac{\ln(t+1)}{(t+1)^2} \, dt \quad 4. I_4 = \int_0^1 \arctan(x) \, dx$$

Solution.

1. Considérons les fonctions $u : x \mapsto 2x - 4$ et $v : x \mapsto e^x$ de sorte que $u' : x \mapsto 2$ et $v' : x \mapsto e^x$. Les fonctions u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ donc, en intégrant par parties,

$$I_1 = [(2x - 4)e^x]_0^1 - \int_0^1 2e^x dx = -2e - (-4) - [2e^x]_0^1 = -2e + 4 - (2e - 2)$$

soit $I_1 = 6 - 4e$.

2. Considérons les fonctions $u : t \mapsto \ln(t)$ et $v : t \mapsto -\frac{1}{t}$ de sorte que $u' : t \mapsto \frac{1}{t}$ et $v' : t \mapsto \frac{1}{t^2}$. Les fonctions u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ donc, en intégrant par parties,

$$I_2 = \left[-\frac{\ln(t)}{t} \right]_1^e - \int_1^e -\frac{1}{t^2} dt = -\frac{1}{e} - \left[\frac{1}{t} \right]_1^e = -\frac{1}{e} - \left(\frac{1}{e} - 1 \right)$$

soit $I_2 = 1 - \frac{2}{e}$.

3. Considérons les fonctions $u : t \mapsto \ln(t + 1)$ et $v : t \mapsto -\frac{1}{t + 1}$ de sorte que $u' : t \mapsto \frac{1}{t + 1}$ et $v' : t \mapsto \frac{1}{(t + 1)^2}$. Les fonctions u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $] -1 ; +\infty[$ donc, en intégrant par parties,

$$I_3 = \left[-\frac{\ln(t + 1)}{t + 1} \right]_0^1 - \int_0^1 -\frac{1}{(t + 1)^2} dt = -\frac{\ln(2)}{2} - \left[\frac{1}{t + 1} \right]_0^1 = -\frac{\ln(2)}{2} - \left(\frac{1}{2} - 1 \right)$$

soit $I_3 = \frac{1 - \ln(2)}{2}$.

4. Considérons les fonctions $u : x \mapsto x$ et $v : x \mapsto \arctan(x)$ de sorte que $u' : x \mapsto 1$ et $v' : x \mapsto \frac{1}{x^2 + 1}$. Les fonctions u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ donc, en intégrant par parties,

$$I_4 = [x \arctan(x)]_0^1 - \int_0^1 \frac{x}{x^2 + 1} dx = \arctan(1) - \frac{1}{2} [\ln(x^2 + 1)]_0^1 = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} (\ln(2) - 0)$$

soit $I_2 = \frac{\pi}{4} - \frac{\ln(2)}{2}$.

Exercice 5. Calculer les intégrales suivantes à l'aide du changement de variable indiqué.

1. $I_1 = \int_0^1 \sqrt{1 - x^2} dx \quad (x = \sin(t))$

2. $I_2 = \int_1^4 \frac{1}{1 + \sqrt{t}} dt \quad (t = x^2)$

3. $I_3 = \int_0^1 \frac{e^{2x}}{e^x + 1} dx \quad (t = e^x)$

4. $I_4 = \int_0^{\ln(2)} \sqrt{e^x - 1} dx \quad (t = \sqrt{e^x - 1})$

Solution.

1. La fonction $\sin$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. De plus, $\sin(0) = 0$, $\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$ et, si on pose $x = \sin(t)$ alors $dx = \cos(t) dt$ donc

$$I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \sin^2(t)} \cos(t) dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos^2(t)} \cos(t) dt.$$

De plus, pour tout $t \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, $\cos(t) \geq 0$ donc $\sqrt{\cos^2(t)} = \cos(t)$ et ainsi

$$I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(t) dt.$$

Or, d'après les formules de duplication, pour tout réel t , $\cos(2t) = 2\cos^2(t) - 1$ donc $\cos^2(t) = \frac{1 + \cos(2t)}{2}$. Dès lors,

$$I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 + \cos(2t)}{2} dt = \left[\frac{t}{2} + \frac{\sin(2t)}{4} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4} + \frac{\sin(\pi)}{4} - 0$$

donc $I_1 = \frac{\pi}{4}$.

2. La fonction carré est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. De plus, $1^1 = 1$, $2^2 = 4$ et, si on pose $t = x^2$ alors $dt = 2x dx$ donc

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_1^2 \frac{1}{1+x} \times 2x dx = 2 \int_1^2 \frac{x}{1+x} dx = 2 \left[\int_1^2 \frac{1+x-1}{1+x} dx \right] \\ &= 2 \left[\int_1^2 \frac{1+x}{1+x} dx - \int_1^2 \frac{1}{1+x} dx \right] \\ &= 2 \left[\int_1^2 1 dx - \int_1^2 \frac{1}{1+x} dx \right] \\ &= 2 \left[1 \times (2-1) - [\ln(1+x)]_1^2 \right] \\ &= 2(1 - (\ln(3) - \ln(2))) \end{aligned}$$

donc $I_2 = 2 - 2 \ln\left(\frac{3}{2}\right)$.

3. Poser $t = e^x$ revient à poser $x = \ln(t)$. Or, la fonction $\ln$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$. De plus, $\ln(1) = 0$, $\ln(e) = 1$ et, si on pose $x = \ln(t)$, alors $dx = \frac{1}{t} dt$. Dès lors,

$$\begin{aligned} I_3 &= \int_1^e \frac{t^2}{t+1} \times \frac{1}{t} dt = \int_1^e \frac{t}{t+1} dt = \int_1^e \frac{t+1-1}{t+1} dt \\ &= \int_1^e 1 dt - \int_1^e \frac{1}{t+1} dt = 1 \times (e-1) - [\ln(t+1)]_1^e \\ &= e-1 - (\ln(e+1) - \ln(2)) \end{aligned}$$

soit $I_3 = e-1 - \ln\left(\frac{e+1}{2}\right)$.

4. Poser $t = \sqrt{e^x - 1}$ revient à poser $t^2 = e^x - 1$ i.e. $x = \ln(1+t^2)$. Or, la fonction $\varphi : t \mapsto \ln(1+t^2)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. De plus, $\varphi(0) = 0$, $\varphi(1) = \ln(2)$ et, si on pose $x = \varphi(t)$, alors $dx = \frac{2t}{1+t^2} dt$. Dès lors,

$$\begin{aligned} I_4 &= \int_0^1 t \times \frac{2t}{1+t^2} dt = \int_0^1 \frac{t^2}{1+t^2} dt = 2 \int_1^e \frac{t^2+1-1}{1+t^2} dt \\ &= 2 \int_0^1 1 dt - 2 \int_0^1 \frac{1}{1+t^2} dt = 2 \times 1 \times (1-0) - 2 [\arctan(t)]_0^1 \\ &= 2 - 2 \left(\frac{\pi}{4} - 0 \right) \end{aligned}$$

soit $I_4 = 2 - \frac{\pi}{2}$.