

Feuille de calcul n°26 — Calculs de limites et de dérivées (II) — Corrigé

Exercice 1. Calculer les limites suivantes.

$$\begin{array}{cccc} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 + x}{x^2 + 1} & \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x+1} - \sqrt{x} & \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\arctan(x)}{x^2} & \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x^2 + 4x - 5} \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(2)^x & \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 + \sin(x) & \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + \sin(x)}{x + \cos(x)} & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{e^{2x} + e^x - 2} \end{array}$$

Solution. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 + x}{x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x$ donc $\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 + x}{x^2 + 1} = +\infty}$.

Pour tout réel $x > 0$,

$$\sqrt{x+1} - \sqrt{x} = \frac{(\sqrt{x+1} - \sqrt{x})(\sqrt{x+1} + \sqrt{x})}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} = \frac{(x+1) - x}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}}.$$

Or, par composition et somme, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x+1} + \sqrt{x} = +\infty$ donc, par quotient, on conclut

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x+1} - \sqrt{x} = 0}.$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \arctan(x) = \frac{\pi}{2} \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty \text{ donc, par quotient, } \boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\arctan(x)}{x^2} = 0}.$$

Pour tout réel x , $x^2 + 4x - 5 = (x-1)(x+5)$ donc, pour tout réel x différent de -5 et 1 ,

$$\frac{x^2 - 1}{x^2 + 4x - 5} = \frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(x+5)} = \frac{x+1}{x+5}$$

et $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+1}{x+5} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ donc $\boxed{\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x^2 + 4x - 5} = \frac{1}{3}}$.

Pour tout réel x , $\ln(2)^x = e^{x \ln(\ln(2))}$. Or, $\ln(2) < 1$ donc $\ln(\ln(2)) < 0$ et ainsi $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln(\ln(2)) = -\infty$. Or, $\lim_{X \rightarrow -\infty} e^X = 0$ donc, par composition, $\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(2)^x = 0}$.

Pour tout réel x , $\sin(x) \geq -1$ donc $x^2 + \sin(x) \geq x^2 - 1$. Or, $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 - 1 = +\infty$ donc, par le théorème de comparaison, $\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 + \sin(x) = +\infty}$.

Pour tout réel $x > 1$, $-1 \leq \sin(x) \leq 1$ donc [*] $0 < x - 1 \leq x + \sin(x) \leq x + 1$ et $-1 \leq \cos(x) \leq 1$ donc $0 < x - 1 \leq x + \cos(x) \leq x + 1$. Par décroissance de la fonction inverse sur $]0; +\infty[$, on déduit de la dernière inégalité que [**] $\frac{1}{x+1} \leq \frac{1}{x + \cos(x)} \leq \frac{1}{x-1}$.

Comme [*] et [**] portent sur des nombres positifs, on peut les multiplier membre à membre, ce qui donne

$$\frac{x-1}{x+1} \leq \frac{x + \sin(x)}{x + \cos(x)} \leq \frac{x+1}{x-1}.$$

Or, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-1}{x+1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 = 1$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+1}{x-1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 = 1$ donc, par

le théorème d'encadrement, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + \sin(x)}{x + \cos(x)} = 1$.

Pour tout réel x , $e^{2x} + e^x - 2 = (e^x)^2 + e^x - 2 = (e^x - 1)(e^x + 2)$ donc, pour tout réel $x > 0$,

$$\frac{e^x - 1}{e^{2x} + e^x - 2} = \frac{e^x - 1}{(e^x - 1)(e^x + 2)} = \frac{1}{e^x + 2}$$

Or, par continuité, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{e^x + 2} = \frac{1}{3}$ donc $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{e^{2x} + e^x - 2} = \frac{1}{3}$.

Exercice 2. Calculer les limites suivantes.

$$\begin{array}{cccc} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-10e^x}{x^{-4}} & \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x)^2 - e^x & \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\ln(x)} & \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x) + \frac{1}{x^2} \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{x+1}}{x^2} & \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x+1)}{x^3} & \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^{2024}}{e^{x^2}} & \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x - x}{2e^{x+3}} \end{array}$$

Solution

Pour tout réel $x < 0$, $\frac{-10e^x}{x^{-4}} = -10x^4 e^x$ donc, par croissance comparée, $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-10e^x}{x^{-4}} = 0$.

Pour tout réel $x > 0$, $\ln(x)^2 - e^x = x \left(\frac{\ln(x)^2}{x} - \frac{e^x}{x} \right)$ et, par croissances comparées, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)^2}{x} = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$ donc, par différence et produit, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x)^2 - e^x = -\infty$.

Par croissance comparée, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0^+$ donc, par inverse, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\ln(x)} = +\infty$.

Pour tout réel $x > 0$, $\ln(x) + \frac{1}{x^2} = \frac{x^2 \ln(x) + 1}{x^2}$. Or, par croissance comparée, $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 \ln(x) = 0$ donc, par somme et quotient, $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x) + \frac{1}{x^2} = +\infty$.

Pour tout réel $x > 0$, $\frac{e^{x+1}}{x^2} = e \times \frac{e^x}{x^2}$. Or, par croissance comparée, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^2} = +\infty$ donc, comme $e > 0$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{x+1}}{x^2} = +\infty$.

Pour tout réel $x > 0$,

$$\frac{\ln(x+1)}{x^3} = \frac{1}{x^3} \ln \left(x \left(\frac{1}{x} + 1 \right) \right) = \frac{\ln(x)}{x^3} + \frac{1}{x^3} \ln \left(\frac{1}{x} + 1 \right)$$

Or, par croissance comparée, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x^3} = 0$ et, par composition et produit, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^3} \ln \left(\frac{1}{x} + 1 \right) = 0$ donc, par somme, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x+1)}{x^3} = 0$.

Pour tout réel x , $\frac{x^{2024}}{e^{x^2}} = \frac{(x^2)^{1012}}{e^{x^2}}$. Or, $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty$ et, par croissance comparée, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^{1012}} = +\infty$ donc, par composition, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{x^2}}{x^{2024}} = +\infty$ et, par inverse, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^{2024}}{e^{x^2}} = 0$.

Pour tout réel $x > 0$, $\frac{e^{x-x}}{2e^x+3} = \frac{e^x(1-\frac{x}{e^x})}{e^x(2+\frac{3}{e^x})} = \frac{1-\frac{x}{e^x}}{2+\frac{3}{e^x}}$. Or, par croissance comparée, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$ donc, par inverse, $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{e^x} = 0$. De plus, comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$, par quotient, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3}{e^x} = 0$ donc, par somme et quotient, $\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{x-x}}{2e^x+3} = \frac{1}{2}}$.

Exercice 3. Calculer les limites suivantes en reconnaissant un taux de variation.

1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(x)}{x}$ 2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(3x)}{x}$ 3. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^x - e}{x - 1}$ 4. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan(x)}{x}$ 5. $\lim_{x \rightarrow e} \frac{\ln(x) - 1}{x - e}$

Solution.

1. Pour tout réel $x \in]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[\setminus \{0\}$, $\frac{\tan(x)}{x} = \frac{\tan(x) - \tan(0)}{x - 0}$ donc, comme \tan est dérivable en 0, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(x)}{x} = \tan'(0) = 1 + \tan^2(0)$ donc $\boxed{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(x)}{x} = 1}$.

2. Pour tout réel $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $\frac{\sin(3x)}{x} = \frac{g(3x) - g(0)}{x - 0}$ où $g : x \mapsto \sin(3x)$. Comme g est dérivable en 0, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(3x)}{x} = g'(0) = 3 \cos(3 \times 0)$ donc $\boxed{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(3x)}{x} = 3}$.

3. Pour tout réel $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$, $\frac{e^x - e}{x - 1} = \frac{e^x - e^1}{x - 1}$ donc, comme \exp est dérivable en 1, $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^x - e}{x - 1} = \exp'(1) = \exp(1)$ donc $\boxed{\lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^x - e}{x - 1} = e}$.

4. Pour tout réel $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $\frac{\arctan(x)}{x} = \frac{\arctan(x) - \arctan(0)}{x - 0}$ donc, comme \arctan est dérivable en 0, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan(x) - \arctan(0)}{x - 0} = \arctan'(0) = \frac{1}{1+0^2}$ donc $\boxed{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan(x)}{x} = 1}$.

5. Pour tout réel $x \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{e\}$, $\frac{\ln(x) - 1}{x - e} = \frac{\ln(x) - \ln(e)}{x - e}$ donc, comme \ln est dérivable en e , $\lim_{x \rightarrow e} \frac{\ln(x) - \ln(e)}{x - e} = \ln'(e) = \frac{1}{e}$ donc $\boxed{\lim_{x \rightarrow e} \frac{\ln(x) - 1}{x - e} = \frac{1}{e}}$.

Exercice 4. Dans chaque cas, calculer $f'(x)$ pour tout réel $x \in D$.

- | | |
|---|---|
| 1. $f : x \mapsto \arctan(\sqrt{x})$ avec $D = \mathbb{R}_+^*$ | 4. $f : x \mapsto \sqrt[3]{\sin^2(3x) + 1}$ avec $D = \mathbb{R}$ |
| 2. $f : x \mapsto \frac{x \ln(x)}{x + 1}$ avec $D = \mathbb{R}_+^*$ | 5. $f : x \mapsto \ln(\arctan(x))$ avec $D = \mathbb{R}_+^*$ |
| 3. $f : x \mapsto \arctan(\sin(x))$ avec $D = \mathbb{R}$ | 6. $f : x \mapsto x^3 \sqrt[5]{x}$ avec $D = \mathbb{R}_+^*$ |

Solution.

1. Pour tout réel $x > 0$,

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \times \frac{1}{1 + \sqrt{x}^2} = \frac{1}{2\sqrt{x}(1+x)}.$$

2. Pour tout réel $x > 0$,

$$f'(x) = \frac{(1 \times \ln(x) + x \times \frac{1}{x})(x+1) - x \ln(x) \times 1}{(x+1)^2} = \frac{(\ln(x) + 1)(x+1) - x \ln(x)}{(x+1)^2}$$

donc, pour tout réel $x > 0$, $f'(x) = \frac{\ln(x) + x + 1}{(x+1)^2}$.

3. Pour tout réel x ,

$$f'(x) = \cos(x) \times \frac{1}{1 + \sin^2(x)} = \frac{\cos(x)}{1 + \sin^2(x)}.$$

4. Pour tout réel x ,

$$f'(x) = 2 \times 3 \cos(3x) \times \sin(3x) \times \frac{1}{3 \sqrt[3]{(\sin^2(3x) + 1)^2}} = \frac{2 \cos(3x) \sin(3x)}{\sqrt[3]{(\sin^2(x) + 1)^2}} = \frac{\sin(6x)}{\sqrt[3]{(\sin^2(x) + 1)^2}}$$

5. Pour tout réel $x > 0$,

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{1+x^2}}{\arctan(x)} = \frac{1}{(1+x^2) \arctan(x)}$$

6. Pour tout réel $x > 0$,

$$f'(x) = 3x^2 \sqrt[5]{x} + x^3 \times \frac{1}{5 \sqrt[5]{x^4}} = 3x^2 \sqrt[5]{x} + x^3 \times \frac{\sqrt[5]{x}}{5x} = \frac{16}{5} x^2 \sqrt[5]{x}.$$