Feuille de calcul n°25 — Espaces vectoriels

Exercice 1. Déterminer si les familles suivantes sont libres ou liées.

1. $\mathcal{F}_1 = (e_1, e_2)$ où $e_1 = (1,2,3)$ et $e_2 = (0,1,1)$.
2. $\mathcal{F}_2 = (e_1, e_2)$ où $e_1 = (1,2,3)$ et $e_2 = (-2,-4,-6)$.
3. $\mathcal{F}_3 = (e_1, e_2, e_3)$ où $e_1 = (1,2,3)$, $e_2 = (0,1,1)$ et $e_3 = (1,0,2)$.
4. $\mathcal{F}_4 = (e_1, e_2, e_3)$ où $e_1 = (1,2,3)$, $e_2 = (1,1,1)$ et $e_3 = (-2,1,4)$.

Solution.

1. Les deux vecteurs e_1 et e_2 ne sont pas colinéaires donc $\boxed{\mathcal{F}_1 \text{ est libre}}$.
2. On remarque que $e_2 = -2e_1$ donc $\boxed{\mathcal{F}_2 \text{ est liée}}$.
3. Soit a, b et c des réels. Alors,

$$ae_1 + be_2 + ce_3 = (0,0,0) \iff \begin{cases} a + c = 0 \\ 2a + b = 0 \\ 3a + b + 2c \end{cases} \iff \begin{cases} c = -a \\ b = -2a \\ 3a - 2a - 2a = 0 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} c = -a \\ b = -2a \\ -a = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} c = 0 \\ b = 0 \\ c = 0 \end{cases}$$

   Ainsi, $a = b = c = 0$ donc $\boxed{\mathcal{F}_3 \text{ est libre}}$.

4. Soit a, b et c des réels. Alors,

$$ae_1 + be_2 + ce_3 = (0,0,0) \iff \begin{cases} a + b - 2c = 0 & L_1 \\ 2a + b + c = 0 & L_2 \\ 3a + b + 4c = 0 & L_3 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} a + b - 2c = 0 & L_1 \\ -b + 5c = 0 & L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ -2b + 10c = 0 & L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} a + b - 2c = 0 & L_1 \\ -b + 5c = 0 & L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ 0 = 0 & L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} a = -3c \\ b = 5c \end{cases}$$

   Ainsi, par exemple pour $c = 1$, $-3e_1 + 5e_2 + e_3 = 0$ donc $\boxed{\mathcal{F}_4 \text{ est liée}}$.

Exercice 2. Déterminer si les familles suivantes sont des bases de E.

1. $\mathcal{F}_1 = (e_1, e_2)$ où $e_1 = (1, 2)$, $e_2 = (0, 4)$ et $E = \mathbb{R}^2$.

2. $\mathcal{F}_2 = (e_1, e_2)$ où $e_1 = (1, 2, 1)$, $e_2 = (0, 4, -2)$ et $E = \mathbb{R}^3$.

3. $\mathcal{F}_3 = (e_1, e_2, e_3)$ où $e_1 = (1, 2, 1)$, $e_2 = (0, 4, 1)$, $e_3 = (1, 0, 1)$ et $E = \mathbb{R}^3$.

4. $\mathcal{F}_4 = (e_1, e_2, e_3)$ où $e_1 = (1, 2, 1)$, $e_2 = (0, 1, 1)$, $e_3 = (1, 0, -1)$ et $E = \mathbb{R}^3$.

Solution.

1. Comme e_1 et e_2 ne sont pas colinéaires, $\mathcal{F}_1$ est libre. Or, $\dim(\mathbb{R}^2) = 2$ donc $\mathcal{F}_1$ est une famille libre de 2 vecteurs dans un espace de dimension 2 donc $\boxed{\mathcal{F}_1 \text{ est une base de } \mathbb{R}^2}$.

2. Comme $\dim(\mathbb{R}^3) = 3$ et comme $\mathcal{F}_2$ ne contient que deux vecteurs, $\boxed{\mathcal{F}_2 \text{ n'est pas une base de } \mathbb{R}^3}$.

3. Soit a, b et c des réels. Alors,

$$\begin{aligned} ae_1 + be_2 + ce_3 = (0,0,0) &\iff \begin{cases} a + c = 0 \\ 2a + 4b = 0 \\ a + b + c = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} c = -a \\ b = -\frac{1}{2}a \\ a - \frac{1}{2}a - a = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} c = 0 \\ b = 0 \\ a = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Ainsi, $a = b = c = 0$ donc $\mathcal{F}_3$ est libre. Or, $\dim(R^3) = 3$ donc $\mathcal{F}_3$ est une famille libre de 3 vecteurs dans un espace de dimension 3. Ainsi, $\boxed{\mathcal{F}_3 \text{ est une base de } \mathbb{R}^3}$.

4. On remarque que $e_1 = 2e_2 + e_3$ donc (e_1, e_2, e_3) est liée et ainsi $\boxed{\mathcal{F}_4 \text{ n'est pas une base de } \mathbb{R}^3}$.

Exercice 3. Les ensembles suivants sont-ils des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$?

1. $F_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0\}$.

2. $F_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 1\}$.

3. $F_3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 - y^2 + z^2 = 0\}$.

4. $F_4 = \mathrm{Vect}((1, 8, 2), (2, -1, 1))$.

5. $F_5 = \{(a - b, a + 2b, b - 3a) \mid (a, b) \in \mathbb{R}^2\}$.

Solution.

1. On remarque que

$$\begin{aligned} F_1 &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = -x - y\} \\ &= \{(x, y, -x - y) \mid (x, y) \in \mathbb{R}^2\} \\ &= \{x(1, 0, -1) + y(0, 1, -1) \mid (x, y) \in \mathbb{R}^2\} \end{aligned}$$

Ainsi, $F_1 = \mathrm{Vect}((1, 0, -1), (0, 1, -1))$ donc $\boxed{F_1 \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathbb{R}^3}$.

2. Comme $0 + 0 + 0 = 0 \neq 1$, $(0, 0, 0) \notin \mathbb{R}^3$ donc $\boxed{F_2 \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathbb{R}^3}$.

3. Comme $1^2 - 1^2 + 0^2 = 0$ et $1^2 - (-1)^2 + 0^2 = 0$, les vecteurs $u = (1, -1, 0)$ et $v = (1, -1, 0)$ appartiennent à F_3. Or, $u + v = (2, 0, 0)$ et $2^2 - 0^2 + 0^2 = 4$ donc $u + v \neq F_3$. Ainsi, $\boxed{F_3 \text{ n'est pas un sous-espace vectoriel de } \mathbb{R}^3}$.

4. Par propriété, un ensemble engendré par des vecteurs de $\mathbb{R}^3$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ donc $\boxed{F_4 \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathbb{R}^3}$.

5. On remarque que

$$F_5 = \{a(1,1,-3) + b(-1,2,1) \mid (a,b) \in \mathbb{R}^2\} = \mathrm{Vect}((1,1,-3),(-1,2,1))$$

donc $\boxed{F_5 \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathbb{R}^3}$.

Exercice 4. Les familles suivantes sont-elles des bases de E ?

1. $\mathcal{F}_1 = ((1,2),(0,1))$ et $E = \mathbb{R}^2$.

2. $\mathcal{F}_2 = ((-2,1,3),(0,1,1))$ et $E = \mathbb{R}^3$.

3. $\mathcal{F}_3 = ((-2,1,3),(0,1,1),(0,0,1))$ et $E = \mathbb{R}^3$.

4. $\mathcal{F}_4 = ((2,1,3),(3,1,2),(1,2,3))$ et $E = \mathbb{R}^3$.

Solution.

1. Comme les deux vecteurs $(1,2)$ et $(0,1)$ ne sont pas colinéaires, la famille $\mathcal{F}_1$ est libre. Or, $\dim(\mathbb{R}^2) = 2$ donc $\mathcal{F}_1$ est une famille libre de 2 vecteurs dans un espace de dimension 2 donc $\boxed{\mathcal{F}_1 \text{ est une base de } \mathbb{R}^2}$.

2. Comme $\dim(R^3) = 3$ et comme $\mathcal{F}_2$ ne contient que 2 vecteurs, $\boxed{\mathcal{F}_2 \text{ n'est pas une base de } \mathbb{R}^3}$.

3. Soit a, b et c des réels. Alors,

$$ae_1 + be_2 + ce_3 = (0,0,0) \iff \begin{cases} -2a = 0 \\ a + b = 0 \\ 3a + b + c = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \\ c = 0 \end{cases}.$$

Ainsi, la famille $\mathcal{F}_3$ est libre. Or, $\dim(\mathbb{R}^3) = 3$ donc $\mathcal{F}_3$ est une famille libre de 3 vecteurs dans un espace de dimension 3 donc $\boxed{\mathcal{F}_3 \text{ est une base de } \mathbb{R}^3}$.

4. Soit a, b et c des réels. Alors,

$$ae_1 + be_2 + ce_3 = (0,0,0) \iff \begin{cases} 2a + b + 3c = 0 & L_1 \\ 3a + b + 2c = 0 & L_2 \\ a + 2b + 3c = 0 & L_3 \end{cases} \iff \begin{cases} a + 2b + 3c = 0 & L_1 \leftrightarrow L_3 \\ 2a + b + 3c = 0 & L_2 \\ 3a + b + 2c = 0 & L_3 \leftrightarrow L_1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} a + 2b + 3c = 0 & L_1 \\ -3b - 3c = 0 & L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ -5b - 7c = 0 & L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} a + 2b + 3c = 0 & L_1 \\ b + c = 0 & L_2 \leftarrow -\frac{1}{3}L_2 \\ 5b + 7c = 0 & L_3 \leftarrow -L_3 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} a + 2b + 3c = 0 & L_1 \\ b + c = 0 & L_2 \\ 2c = 0 & L_3 \leftarrow L_3 - 5L_2 \end{cases}$$

On obtient un système échelonné de rang 3 donc le système est un système de Cramer homogène. Ainsi, l'unique solution est $a = b = c = 0$ donc la famille $\mathcal{F}_4$ est libre et, par le même argument de dimension que précédemment, on conclut que $\boxed{\mathcal{F}_4 \text{ est une base de } \mathbb{R}^3}$.

Exercice 5. Déterminer le rang des familles de vecteurs suivantes.

1. $\mathcal{F}_1 = (e_1, e_2, e_3)$ où $e_1 = (1,0,1)$, $e_2 = (1,1,0)$ et $e_3 = (0,1,0)$.
2. $\mathcal{F}_2 = (e_1, e_2, e_{3,4})$ où $e_1 = (1,0,1,0)$, $e_2 = (1,1,0,0)$, $e_3 = (0,1,0,1)$ et $e_4 = (1,0,0,1)$.
3. $\mathcal{F}_3 = (e_1, e_2, e_3)$ où $e_1 = (1,1,1)$, $e_2 = (2,2,2)$ et $e_3 = (3,3,3)$.
4. $\mathcal{F}_4 = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ où $e_1 = (1,0,1,0)$, $e_2 = (0,1,0,1)$, $e_3 = (2,3,2,3)$ et $e_4 = (3,2,3,2)$.

Solution.

1. Soit a, b et c des réels. Alors,

$$ae_1 + be_2 + ce_3 = (0,0,0) \iff \begin{cases} a+b=0 \\ b+c=0 \\ a=0 \end{cases} \iff \begin{cases} b=0 \\ c=0 \\ a=0 \end{cases}$$

donc $\mathcal{F}_1$ est une famille libre de 3 vecteurs donc $\boxed{\mathrm{rg}(\mathcal{F}_1) = 3}$.

2. Soit a, b, c et d des réels. Alors,

$$ae_1 + be_2 + ce_3 + de_4 = (0,0,0,0) \iff \begin{cases} a+b+d=0 \\ b+c=0 \\ a=0 \\ c+d=0 \end{cases} \iff \begin{cases} b+d=0 \\ b=-c \\ a=0 \\ d=-c \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} -2c=0 \\ b=-c \\ a=0 \\ d=-c \end{cases} \iff \begin{cases} c=0 \\ b=0 \\ a=0 \\ d=0 \end{cases}$$

donc la famille $\mathcal{F}_2$ est libre. Ainsi, $\boxed{\mathrm{rg}(\mathcal{F}_2) = 4}$.

3. On remarque que $e_2 = 2e_1$ et $e_3 = 3e_1$ donc $\mathrm{Vect}(\mathcal{F}_3) = \mathrm{Vect}(e_1)$ et, comme $e_1 \neq (0,0,0)$, on conclut que $\boxed{\mathrm{rg}(\mathcal{F}_3) = 1}$.

4. On peut remarquer que $e_3 = 2e_1 + 3e_2$ et que $e_4 = 3e_1 + 2e_2$ donc $\mathrm{Vect}(\mathcal{F}_4) = \mathrm{Vect}(e_1, e_2)$. De plus, e_1 et e_2 sont deux vecteurs non colinéaires donc $\mathrm{Vect}(\mathcal{F}_4) = 2$ i.e. $\boxed{\mathrm{rg}(\mathcal{F}_4) = 2}$.