

Feuille de calcul n°25 — Espaces vectoriels

Exercice 1. Déterminer si les familles suivantes sont libres ou liées.

1. $\mathcal{F}_1 = (e_1, e_2)$ où $e_1 = (1, 2, 3)$ et $e_2 = (0, 1, 1)$.
2. $\mathcal{F}_2 = (e_1, e_2)$ où $e_1 = (1, 2, 3)$ et $e_2 = (-2, -4, -6)$.
3. $\mathcal{F}_3 = (e_1, e_2, e_3)$ où $e_1 = (1, 2, 3)$, $e_2 = (0, 1, 1)$ et $e_3 = (1, 0, 2)$.
4. $\mathcal{F}_4 = (e_1, e_2, e_3)$ où $e_1 = (1, 2, 3)$, $e_2 = (1, 1, 1)$ et $e_3 = (-2, 1, 4)$.

Exercice 2. Déterminer si les familles suivantes sont des bases de E .

1. $\mathcal{F}_1 = (e_1, e_2)$ où $e_1 = (1, 2)$, $e_2 = (0, 4)$ et $E = \mathbb{R}^2$.
2. $\mathcal{F}_2 = (e_1, e_2)$ où $e_1 = (1, 2, 1)$, $e_2 = (0, 4, -2)$ et $E = \mathbb{R}^3$.
3. $\mathcal{F}_3 = (e_1, e_2, e_3)$ où $e_1 = (1, 2, 1)$, $e_2 = (0, 4, 1)$, $e_3 = (1, 0, 1)$ et $E = \mathbb{R}^3$.
4. $\mathcal{F}_4 = (e_1, e_2, e_3)$ où $e_1 = (1, 2, 1)$, $e_2 = (0, 1, 1)$, $e_3 = (1, 0, -1)$ et $E = \mathbb{R}^3$.

Exercice 3. Les ensembles suivants sont-ils des sous-espaces vectoriels de \mathbb{R}^3 ?

1. $F_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0\}$.
2. $F_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 1\}$.
3. $F_3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 - y^2 + z^2 = 0\}$.
4. $F_4 = \text{Vect}((1, 8, 2), (2, -1, 1))$.
5. $F_5 = \{(a - b, a + 2b, b - 3a) \mid (a, b) \in \mathbb{R}^2\}$.

Exercice 4. Les familles suivantes sont-elles des bases de E ?

1. $\mathcal{F}_1 = ((1, 2), (0, 1))$ et $E = \mathbb{R}^2$.
2. $\mathcal{F}_2 = ((-2, 1, 3), (0, 1, 1))$ et $E = \mathbb{R}^3$.
3. $\mathcal{F}_3 = ((-2, 1, 3), (0, 1, 1), (0, 0, 1))$ et $E = \mathbb{R}^3$.
4. $\mathcal{F}_4 = ((2, 1, 3), (3, 1, 2), (1, 2, 3))$ et $E = \mathbb{R}^3$.

Exercice 5. Déterminer le rang des familles de vecteurs suivantes.

1. $\mathcal{F}_1 = (e_1, e_2, e_3)$ où $e_1 = (1, 0, 1)$, $e_2 = (1, 1, 0)$ et $e_3 = (0, 1, 0)$.
2. $\mathcal{F}_2 = (e_1, e_2, e_{3,4})$ où $e_1 = (1, 0, 1, 0)$, $e_2 = (1, 1, 0, 0)$, $e_3 = (0, 1, 0, 1)$ et $e_4 = (1, 0, 0, 1)$.
3. $\mathcal{F}_3 = (e_1, e_2, e_3)$ où $e_1 = (1, 1, 1)$, $e_2 = (2, 2, 2)$ et $e_3 = (3, 3, 3)$.
4. $\mathcal{F}_4 = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ où $e_1 = (1, 0, 1, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0, 1)$, $e_3 = (2, 3, 2, 3)$ et $e_4 = (3, 2, 3, 2)$.