Feuille de calcul n°23 — Primitives et intégrales — Correction

Exercice 1. Dans chaque cas, déterminer une primitive F de f sur I.

1. $f : x \longmapsto x^3,\ I = \mathbb{R}$ **2.** $f : x \longmapsto 2x^5,\ I = \mathbb{R}$ **3.** $f : x \longmapsto x^2 + 2x - 3,\ I = \mathbb{R}$

4. $f : x \longmapsto \dfrac{1}{x^2} - x^2,\ I = \mathbb{R}_+^*$ **5.** $f : x \longmapsto -\dfrac{4}{3x^5},\ I = \mathbb{R}_+^*$ **6.** $f : x \longmapsto x + \dfrac{1}{\sqrt{x}},\ I = \mathbb{R}_+^*$

Solution.

1. $F : x \longmapsto \dfrac{x^4}{4}$.

2. $F : x \longmapsto \dfrac{x^6}{3}$.

3. $F : x \longmapsto \dfrac{x^3}{3} + x^2 - 3x$.

4. $F : x \longmapsto -\dfrac{1}{x} - \dfrac{x^3}{3}$.

5. $F : x \longmapsto \dfrac{1}{3x^4}$.

6. $F : x \longmapsto \dfrac{x^2}{2} + 2\sqrt{x}$.

Exercice 2. Dans chaque cas, déterminer une primitive F de f sur I.

1. $f : x \longmapsto (3x+1)^4,\ I = \mathbb{R}$ **2.** $f : x \longmapsto (2x+7)^6,\ I = \mathbb{R}$ **3.** $f : x \longmapsto \dfrac{1}{x^2}\left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^4,\ I = \mathbb{R}_+^*$

4. $f : x \longmapsto \dfrac{6x}{(2x^2+1)^2},\ I = \mathbb{R}$ **5.** $f : x \longmapsto \dfrac{\mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x+3)^4},\ I = \mathbb{R}$ **6.** $f : x \longmapsto \dfrac{x+1}{(x^2+2x+3)^4},\ I = \mathbb{R}$

7. $f : x \longmapsto \dfrac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x+1},\ I = \mathbb{R}$ **8.** $f : x \longmapsto \dfrac{x}{1+x^2},\ I = \mathbb{R}$ **9.** $f : x \longmapsto \dfrac{1}{x\ln(x)},\ I =]1\,;+\infty[$

10. $f : x \longmapsto \mathrm{e}^{2x},\ I = \mathbb{R}$ **11.** $f : x \longmapsto \mathrm{e}^{-x},\ I = \mathbb{R}$ **12.** $f : x \longmapsto \dfrac{\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}{x^2},\ I = \mathbb{R}_+^*$

Solution.

1. Pour tout réel x, $f(x) = \dfrac{1}{3} \times \underbrace{3(3x+1)^4}_{u'(x)u(x)^4}$ donc $F : x \longmapsto \dfrac{1}{3} \times \dfrac{1}{5}(3x+1)^5$ c'est-à-dire $F : x \longmapsto \dfrac{1}{15}(3x+1)^5$ est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

2. Pour tout réel x, $f(x) = \dfrac{1}{2} \times \underbrace{2(2x+7)^6}_{u'(x)u(x)^n}$ donc $F : x \longmapsto \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{7}(2x+7)^7$ c'est-à-dire $F : x \longmapsto \dfrac{1}{14}(2x+7)^7$ est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

3. Pour tout réel $x > 0$, $f(x) = -\underbrace{\left(-\frac{1}{x^2}\right) \times \left(1+\frac{1}{x}\right)^4}_{u'(x)u(x)^n}$ donc $F : x \longmapsto -\frac{1}{5}\left(1+\frac{1}{x}\right)^5$ est une primitive de f sur $\mathbb{R}_+^*$.

4. Pour tout réel x, $f(x) = \frac{3}{2} \times \underbrace{\frac{4x}{(2x^2+1)^2}}_{\frac{u'(x)}{u(x)^n}}$ donc $F : x \longmapsto \frac{3}{2} \times \left(-\frac{1}{2x^2+1}\right)$ c'est-à-dire $F : x \longmapsto -\frac{3}{2(2x^2+1)}$ est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

5. Pour tout réel x, $f(x) = \underbrace{\frac{\mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x+3)^4}}_{\frac{u'(x)}{u(x)^n}}$ donc $F : x \longmapsto -\frac{1}{3(\mathrm{e}^x+3)^3}$ est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

6. Pour tout réel x, $f(x) = \frac{1}{2}\underbrace{\frac{2x+2}{(x^2+2x+3)^4}}_{\frac{u'(x)}{u(x)^n}}$ donc $F : x \longmapsto \frac{1}{2} \times \left(-\frac{1}{3(x^2+2x+3)^3}\right)$ i.e. $F : x \longmapsto -\frac{1}{6(x^2+2x+3)^3}$ est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

7. Pour tout réel x, $f(x) = \underbrace{\frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x+1}}_{\frac{u'(x)}{u(x)}}$ donc, étant donné que $\mathrm{e}^x+1 > 0$ pour tout réel x, $F : x \longmapsto \ln(\mathrm{e}^x+1)$ est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

8. Pour tout réel x, $f(x) = \frac{1}{2} \times \underbrace{\frac{2x}{1+x^2}}_{\frac{u'(x)}{u(x)}}$ donc, étant donné que $1+x^2 > 0$ pour tout réel x, $F : x \longmapsto \frac{1}{2}\ln(1+x^2)$ est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

9. Pour tout réel $x > 1$, $f(x) = \underbrace{\frac{\frac{1}{x}}{\ln(x)}}_{\frac{u'(x)}{u(x)}}$ donc, étant donné que $ln(x) > 0$ pour tout réel $x > 1$, $F : x \longmapsto \ln(\ln(x))$ est une primitive de f sur $]1\,;+\infty[$.

10. Pour tout réel x, $f(x) = \frac{1}{2} \times \underbrace{2\,\mathrm{e}^{2x}}_{u'(x)\,\mathrm{e}^{u(x)}}$ donc $F : x \longmapsto \frac{1}{2}\mathrm{e}^{2x}$ est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

11. Pour tout réel x, $f(x) = -\underbrace{\left(-\mathrm{e}^{-x}\right)}_{u'(x)\,\mathrm{e}^{u(x)}}$ donc $F : x \longmapsto -\mathrm{e}^{-x}$ est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

12. Pour tout réel $x > 0$, $f(x) = -\underbrace{\left(-\frac{1}{x^2}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}\right)}_{u'(x)\,\mathrm{e}^{u(x)}}$ donc $F : x \longmapsto -\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$ est une primitive de f sur $\mathbb{R}_+^*$.

Exercice 3. Calculer les intégrales suivantes à l'aide d'une primitives.

1. $I_1 = \displaystyle\int_0^1 3x^2 + x + 2\,\mathrm{d}x$ **2.** $I_2 = \displaystyle\int_2^4 \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t$ **3.** $I_3 = \displaystyle\int_1^2 x\,\mathrm{e}^{x^2-1}\mathrm{d}x$

4. $I_4 = \displaystyle\int_3^4 \frac{u-1}{u^2-2u}\,\mathrm{d}u$ **5.** $I_5 = \displaystyle\int_0^3 \frac{1}{\sqrt{t+1}}\,\mathrm{d}t$ **6.** $I_6 = \displaystyle\int_0^1 t^2\,\mathrm{e}^{-t^3}\mathrm{d}t$

7. $I_7 = \displaystyle\int_1^2 \frac{6}{s} + 3s + 4\,\mathrm{d}s$ **8.** $I_8 = \displaystyle\int_1^2 \frac{3}{x^2}\,\mathrm{d}x$ **9.** $I_9 = \displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^{t} + \mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t$

10. $I_{10} = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+u^2}\,\mathrm{d}u$ **11.** $I_{11} = \displaystyle\int_0^\pi \sin(t)\cos^2(t)\,\mathrm{d}t$ **12.** $I_{12} = \displaystyle\int_2^3 \frac{x}{(x^2-3)^3}\,\mathrm{d}x$

Solution.

1. $I_1 = \left[x^3 + \dfrac{x^2}{2} + 2x\right]_0^1 = \dfrac{7}{2}.$

2. $I_2 = [\ln(t)]_2^4 = \ln(4) - \ln(2) = \ln(2).$

3. $I_3 = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^2 \underbrace{2x\,\mathrm{e}^{x^2-1}}_{u'(x)\,\mathrm{e}^{u(x)}}\mathrm{d}x = \dfrac{1}{2}\left[\mathrm{e}^{x^2-1}\right]_0^2 = \dfrac{\mathrm{e}^{3}-1}{2}$

4. $I_4 = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_3^4 \underbrace{\frac{2u-2}{u^2-2u}}_{\frac{v'(u)}{v(u)}}\mathrm{d}u = \dfrac{1}{2}\left[\ln(u^2-2u)\right]_3^4 = \dfrac{1}{2}\left(\ln(8)-\ln(3)\right) = \dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{8}{3}\right)$

5. $I_5 = \left[2\sqrt{t+1}\right]_0^3 = 2\sqrt{4} - 2\sqrt{1} = 2$

6. $I_6 = -\dfrac{1}{3}\displaystyle\int_0^1 \underbrace{-3t^2\,\mathrm{e}^{-t^3}}_{u'(t)\,\mathrm{e}^{u(t)}}\mathrm{d}t = -\dfrac{1}{3}\left[\mathrm{e}^{-t^3}\right]_0^1 = -\dfrac{\mathrm{e}^{-1}-1}{3} = \dfrac{1-\mathrm{e}^{-1}}{3}$

7. $I_7 = \left[6\ln(s) + \dfrac{3}{2}s^2 + 4s\right]_1^2 = 6\ln(2) + 14 - \dfrac{11}{2} = 6\ln(2) + \dfrac{17}{2}$

8. $I_8 = \left[-\dfrac{3}{x}\right]_1^2 = -\dfrac{3}{2} + 3 = \dfrac{3}{2}$

9. $I_9 = [\mathrm{e}^{t} - \mathrm{e}^{-t}]_0^1 = e - e^{-1} - (1-1) = e - e^{-1}.$

10. $I_{10} = [\arctan(u)]_0^1 = \arctan(1) - \arctan(0) = \dfrac{\pi}{4} - 0 = \dfrac{\pi}{4}$

11. $I_{11} = -\displaystyle\int_0^\pi \underbrace{(-\sin(t))\cos^2(t)}_{u'(t)u(t)^n}\mathrm{d}t = -\left[\dfrac{\cos^3(t)}{3}\right]_0^\pi = -\left(\dfrac{(-1)^3}{3} - \dfrac{1}{3}\right) = \dfrac{2}{3}$

12. $I_{12} = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_2^3 \underbrace{\frac{2x}{(x^2-3)^3}}_{\frac{u'(t)}{u(x)^3}}\mathrm{d}x = \dfrac{1}{2}\left[-\dfrac{1}{2(x^2-3)^2}\right]_2^3 = \dfrac{1}{2}\left(-\dfrac{1}{72} + \dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{35}{144}$

Exercice 4. Calculer les intégrales suivantes à l'aide d'une intégration par parties.

1. $I_1 = \displaystyle\int_0^1 (2x-4)\,\mathrm{e}^{x}\mathrm{d}x$ **2.** $I_2 = \displaystyle\int_1^e \frac{\ln(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t$ **3.** $I_3 = \displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(t+1)}{(t+1)^2}\,\mathrm{d}t$ **4.** $I_4 = \displaystyle\int_0^1 \arctan(x)\,\mathrm{d}x$

Solution.

1. Considérons les fonctions $u : x \longmapsto 2x - 4$ et $v : x \longmapsto \mathrm{e}^{x}$ de sorte que $u' : x \longmapsto 2$ et $v' : x \longmapsto \mathrm{e}^{x}$. Les fonctions u et v sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ donc, en intégrant par parties,
$$I_1 = [(2x-4)\,\mathrm{e}^{x}]_0^1 - \int_0^1 2\,\mathrm{e}^{x}\mathrm{d}x = -2e - (-4) - [2\,\mathrm{e}^{x}]_0^1 = -2e + 4 - (2e - 2)$$
soit $I_1 = 6 - 4e$.

2. Considérons les fonctions $u : t \longmapsto \ln(t)$ et $v : t \longmapsto -\dfrac{1}{t}$ de sorte que $u' : t \longmapsto \dfrac{1}{t}$ et $v' : t \longmapsto \dfrac{1}{t^2}$. Les fonctions u et v sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ donc, en intégrant par parties,
$$I_2 = \left[-\frac{\ln(t)}{t}\right]_1^e - \int_1^e -\frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{e} - \left[\frac{1}{t}\right]_1^e = -\frac{1}{e} - \left(\frac{1}{e} - 1\right)$$
soit $I_2 = 1 - \dfrac{2}{e}$.

3. Considérons les fonctions $u : t \longmapsto \ln(t+1)$ et $v : t \longmapsto -\dfrac{1}{t+1}$ de sorte que $u' : t \longmapsto \dfrac{1}{t+1}$ et $v' : t \longmapsto \dfrac{1}{(t+1)^2}$. Les fonctions u et v sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]-1\,;+\infty[$ donc, en intégrant par parties,
$$I_3 = \left[-\frac{\ln(t+1)}{t+1}\right]_0^1 - \int_0^1 -\frac{1}{(t+1)^2}\,\mathrm{d}t = -\frac{\ln(2)}{2} - \left[\frac{1}{t+1}\right]_0^1 = -\frac{\ln(2)}{2} - \left(\frac{1}{2} - 1\right)$$
soit $I_3 = \dfrac{1-\ln(2)}{2}$.

4. Considérons les fonctions $u : x \longmapsto x$ et $v : x \longmapsto \arctan(x)$ de sorte que $u' : x \longmapsto 1$ et $v' : x \longmapsto \dfrac{1}{x^2+1}$. Les fonctions u et v sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ donc, en intégrant par parties,
$$I_4 = [x\arctan(x)]_0^1 - \int_0^1 \frac{x}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = \arctan(1) - \frac{1}{2}\left[\ln(x^2+1)\right]_0^1 = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}(\ln(2) - 0)$$
soit $I_2 = \dfrac{\pi}{4} - \dfrac{\ln(2)}{2}$.

Exercice 5. Calculer les intégrales suivantes à l'aide du changement de variable indiqué.

1. $I_1 = \displaystyle\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x \quad (x = \sin(t))$
2. $I_2 = \displaystyle\int_1^4 \frac{1}{1+\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t \quad (t = x^2)$
3. $I_3 = \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{2x}}{\mathrm{e}^{x}+1}\,\mathrm{d}x \quad (t = \mathrm{e}^{x})$
4. $I_4 = \displaystyle\int_0^{\ln(2)} \sqrt{\mathrm{e}^{x}-1}\,\mathrm{d}x \quad (t = \sqrt{\mathrm{e}^{x}-1})$

Solution.

1. La fonction sin est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. De plus, $\sin(0) = 0$, $\sin\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 1$ et, si on pose $x = \sin(t)$ alors $\mathrm{d}x = \cos(t)\,\mathrm{d}t$ donc
$$I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sin^2(t)}\cos(r)\,\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos^2(t)}\cos(t)\,\mathrm{d}t.$$

De plus, pour tout $t \in \left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$, $\cos(t) \geqslant 0$ donc $\sqrt{\cos^2(t)} = \cos(t)$ et ainsi

$$I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(t)\,\mathrm{d}t.$$

Or, d'après les formules de duplication, pour tout réel t, $\cos(2t) = 2\cos^2(t) - 1$ donc $\cos^2(t) = \dfrac{1+\cos(2t)}{2}$. Dès lors,

$$I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos(2t)}{2}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{t}{2} + \frac{\sin(2t)}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4} + \frac{\sin(\pi)}{4} - 0$$

donc $I_1 = \dfrac{\pi}{4}$.

2. La fonction carré est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. De plus, $1^1 = 1$, $2^2 = 4$ et, si on pose $t = x^2$ alors $\mathrm{d}t 2x\,\mathrm{d}x$ donc

$$\begin{aligned}
I_2 &= \int_1^2 \frac{1}{1+x} \times 2x\,\mathrm{d}x = 2\int_1^2 \frac{x}{1+x}\,\mathrm{d}x = 2\left[\int_1^2 \frac{1+x-1}{1+x}\,\mathrm{d}x\right]\\
&= 2\left[\int_1^2 \frac{1+x}{1+x}\,\mathrm{d}x - \int 1^2 \frac{1}{1+x}\,\mathrm{d}x\right]\\
&= 2\left[\int_1^2 1\,\mathrm{d}x - \int 1^2 \frac{1}{1+x}\,\mathrm{d}x\right]\\
&= 2\left[1 \times (2-1) - [\ln(1+x)]_1^2\right]\\
&= 2(1 - (\ln(3 - ln(2))))
\end{aligned}$$

donc $I_2 = 2 - 2\ln\left(\dfrac{3}{2}\right)$.

3. Poser $t = \mathrm{e}^x$ revient à poser $x = \ln(t)$. Or, la fonction $\ln$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$. De plus, $\ln(1) = 0$, $\ln(e) = 1$ et, si on pose $x = \ln(t)$, alors $\mathrm{d}x = \dfrac{1}{t}\,\mathrm{d}t$. Dès lors,

$$\begin{aligned}
I_3 &= \int_1^e \frac{t^2}{t+1} \times \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t = \int_1^e \frac{t}{t+1}\,\mathrm{d}t = \int_1^e \frac{t+1-1}{t+1}\,\mathrm{d}t\\
&= \int_1^e 1\,\mathrm{d}t - \int_1^e \frac{1}{t+1}\,\mathrm{d}t = 1 \times (e-1) - (\ln(t+1)]_1^e\\
&= e - 1 - (\ln(e+1) - \ln(2))
\end{aligned}$$

soit $I_3 = e - 1 - \ln\left(\dfrac{e+1}{2}\right)$.

4. Poser $t = \sqrt{\mathrm{e}^x - 1}$ revient à poser $t^2 = \mathrm{e}^x - 1$ i.e. $x = \ln(1+t^2)$. Or, la fonction $\varphi : t \longmapsto \ln(1+t^2)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. De plus, $\varphi(0) = 0$, $\varphi(1) = \ln(2)$ et, si on pose $x = \varphi(t)$, alors $\mathrm{d}x = \dfrac{2t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$. Dès lors,

$$\begin{aligned}
I_4 &= \int_0^1 t \times \frac{2t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{t^2}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = 2\int_1^e \frac{t^2+1-1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t\\
&= 2\int_0^1 1\,\mathrm{d}t - 2\int_0^1 \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = 2 \times 1 \times (1-0) - 2\left[\arctan(t)\right]_0^1\\
&= 2 - 2\left(\frac{\pi}{4} - 0\right)
\end{aligned}$$

soit $I_4 = 2 - \dfrac{\pi}{2}$.