Feuille de calcul n°23 — Calculs de dérivées et de primitives – Corrigés

Exercice 1. Dans chaque cas suivant, calculer $f'(x)$ pour tout $x \in I$. On ne demande pas de justifier la dérivabilité de f sur I.

1. $f : x \longmapsto x\mathrm{e}^{3x}$, $I = \mathbb{R}$

2. $f : x \longmapsto \ln(2+\cos(x))$, $I = \mathbb{R}$

3. $f : x \longmapsto \dfrac{x^3}{x^2+1}$, $I = \mathbb{R}$

4. $f : x \longmapsto \mathrm{e}^{x^2}\ln(x)$, $I = \mathbb{R}_+^*$

Solution.

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 1 \times \mathrm{e}^{3x} + x \times 3\mathrm{e}^{3x}$ donc $\boxed{f'(x) = (3x+1)\mathrm{e}^{3x}}$.

2. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\boxed{f'(x) = \dfrac{-\sin(x)}{2+\cos(x)}}$.

3. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \dfrac{3x^2(x^2+1) - x^3 \times 2x}{(x^2+1)^2} = \dfrac{3x^4+3x^2-2x^4}{(x^2+1)^2} = \dfrac{x^4+3x^2}{(x^2+1)^2}$ donc $\boxed{f'(x) = \dfrac{x^2(x^2+3)}{(x^2+1)^2}}$.

4. Pour tout $x > 0$, $f'(x) = 2x\mathrm{e}^{x^2}\ln(x) + \mathrm{e}^{x^2} \times \dfrac{1}{x} = \left(2x\ln(x) + \dfrac{1}{x}\right)\mathrm{e}^{x^2}$ et ainsi on conclut que $\boxed{f'(x) = \dfrac{2x^2\ln(x)+1}{x}\mathrm{e}^{x^2}}$.

Exercice 2. Dans chaque cas suivant, calculer $f'(x)$ pour tout $x \in I$. On ne demande pas de justifier la dérivabilité de f sur I.

1. $f : x \longmapsto \mathrm{e}^{\frac{x+1}{x-1}}$, $I =]1\,;+\infty[$

2. $f : x \longmapsto \sin(x)\cos(x)$, $I = \mathbb{R}$

3. $f : x \longmapsto x(\ln(x))^3$, $I = \mathbb{R}_+^*$

4. $f : x \longmapsto (\cos(\mathrm{e}^x))^3$, $I = \mathbb{R}$

Solution.

1. Considérons la fonction $u : x \longmapsto \frac{x+1}{x-1}$ définie sur l'intervalle I. Alors, pour tout $x \in I$, $u'(x) = \frac{1(x-1)-(x+1)\times 1}{(x-1)^2} = \frac{-2}{(x-1)^2}$. Dès lors, pour tout $x \in I$, $\boxed{f'(x) = -\frac{2}{(x-1)^2}\mathrm{e}^{\frac{x+1}{x-1}}}$.

2. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \cos(x)\cos(x) + \sin(x)(-\sin(x)) = \cos^2(x) - \sin^2(x)$ donc $\boxed{f'(x) = \cos(2x)}$.

3. Pour tout $x \in I$, $f'(x) = 1 \times (\ln(x))^3 + x \times 3\frac{1}{x}(\ln(x))^2 = (\ln(x))^3 + 3(\ln(x))^2$ donc $\boxed{f'(x) = (\ln(x))^2(\ln(x)+3)}$.

4. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 3\times\mathrm{e}^{x}\times(-\sin(\mathrm{e}^x))(\cos(\mathrm{e}^x))^2$ donc $\boxed{f'(x) = -3\mathrm{e}^x\sin(\mathrm{e}^x)(\cos(\mathrm{e}^x))^2}$.

Exercice 3. Dans chaque cas suivant, calculer $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^2$. On ne demande pas de justifier l'existence des dérivées partielles.

1. $f : (x,y) \longmapsto x^3 + x^2y + xy^2 + y^3$
2. $f : (x,y) \longmapsto x\mathrm{e}^{xy}$
3. $f : (x,y) \longmapsto \ln(x^4 + y^2 + 1)$
4. $f : (x,y) \longmapsto \dfrac{xy}{x^2+3}$
5. $f : (x,y) \longmapsto x\cos(xy^2) + y\sin(y)$

Solution.

1. Pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $\boxed{\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 3x^2 + 2xy + y^2}$ et $\boxed{\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x^2 + 2xy + 3y^2}$.
2. Pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \mathrm{e}^{xy} + xy\mathrm{e}^{xy}$ donc $\boxed{\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = (1+xy)\mathrm{e}^{xy}}$ et, d'autre part, $\boxed{\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x^2\mathrm{e}^{xy}}$.
3. Pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $\boxed{\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \dfrac{4x^3}{x^4+y^2+1}}$ et $\boxed{\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \dfrac{2y}{x^4+y^2+1}}$.
4. Pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \dfrac{y(x^2+3) - xy \times 2x}{(x^2+3)^2} = \dfrac{y(x^2+3-2x^2)}{(x^2+3)^2}$ c'est-à-dire $\boxed{\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \dfrac{y(3-x^2)}{(x^2+3)^2}}$ et, d'autre part, $\boxed{\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \dfrac{x}{x^2+3}}$.
5. Pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$,
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 1 \times \cos(xy^2) + xy^2(-\sin(xy^2))$$
c'est-à-dire $\boxed{\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \cos(xy^2) - xy^2\sin(xy^2)}$ et, d'autre part,
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x \times 2xy)(-\sin(xy^2)) + 1 \times sin(y) + y\cos(y)$$
donc $\boxed{\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -2x^2y\sin(xy^2) + \sin(y) + y\cos(y)}$.

Exercice 4. Dans chaque cas, montrer que la fonction F est une primitive de la fonction f sur I.

1. $F : x \longmapsto \dfrac{\cos(3x) + 3x\sin(3x)}{9}$ et $f : x \longmapsto x\cos(3x)$ sur $I = \mathbb{R}$.
2. $F : x \longmapsto \dfrac{x}{x^2+1}$ et $f : x \longmapsto \dfrac{1-x^2}{(x^2+1)^2}$ sur $I = \mathbb{R}$.
3. $F : x \longmapsto 2x^2\ln(x) - x^2$ et $f : x \longmapsto x\ln(x^4)$ sur $I = \mathbb{R}_+^*$.

Solution.

1. Pour tout réel x, $F(x) = \frac{1}{9}\cos(3x) + \frac{1}{3}x\sin(3x)$ donc la fonction F est dérivables sur $\mathbb{R}$ comme somme, produit et composées de fonctions dérivables et, pour tout réel x,

$$F'(x) = \frac{1}{9}\times(-3\sin(3x)) + \frac{1}{3}(\sin(3x)+3x\cos(3x)) = -\frac{1}{3}\sin(3x)+\frac{1}{3}\sin(3x)+x\cos(3x) = f(x)$$

donc $\boxed{F \text{ est une primitive de } f \text{ sur } I}$.

2. La fonction F est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme quotient de fonctions dérivables dont le dénominateur ne s'annule pas et, pour tout réel x,

$$F'(x) = \frac{1\times(x^2+1) - x\times 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{x^2+1-2x^2}{(x^2+1)^2} = \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2} = f(x)$$

donc $\boxed{F \text{ est une primitive de } f \text{ sur } I}$.

3. La fonction F est dérivable sur I comme somme et produit de fonctions dérivables et, pour tout $x \in I$,

$$F'(x) = 4x\ln(x) + 2x^2 \times \frac{1}{x} - 2x = 4x\ln(x) + 2x - 2x = 4x\ln(x) = x\ln(x^4) = f(x)$$

donc $\boxed{F \text{ est une primitive de } f \text{ sur } I}$.

Exercice 5. Dans chaque cas, déterminer une primitive F de f sur I.

1. $f : x \longmapsto x^3 + \cos(2x)$, $I = \mathbb{R}$.
2. $f : x \longmapsto \dfrac{x^2}{x^3+1}$, $I =]-1\,;+\infty[$
3. $f : x \longmapsto \frac{1}{x^3}\mathrm{e}^{\frac{1}{x^2}}$, $I = \mathbb{R}_+^*$
4. $f : x \longmapsto \dfrac{\cos(2x)}{(2+\sin(2x))^3}$, $I = \mathbb{R}$
5. $f : x \longmapsto x\cos(x^2)$, $I = \mathbb{R}$

Solution.

1. Une primitive de f sur I est $\boxed{F : x \longmapsto \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}\sin(2x)}$.
2. Pour tout $x \in I$, $f(x) = \frac{1}{3}\times\frac{3x^2}{x^3+1}$ donc une primitive de f sur I est $\boxed{F : x \longmapsto \frac{1}{3}\ln(x^3+1)}$ (car $x^3+1>0$ pour tout $x \in I$).
3. Pour tout $x \in I$, $f(x) = -\frac{1}{2}\times(-\frac{2}{x^3})\mathrm{e}^{\frac{1}{x^2}}$ donc une primitive de f sur I est $\boxed{F : x \longmapsto -\frac{1}{2}\mathrm{e}^{\frac{1}{x^2}}}$.
4. Pour tout $x \in I$, $f(x) = \frac{1}{2}\times\frac{2\cos(2x)}{(2+\sin(2x))^3}$ donc une primitive de f sur I est $\boxed{F : x \longmapsto -\frac{1}{4(2+\sin(2x))^2}}$.
5. Pour tout $x \in R$, $f(x) = \frac{1}{2}\times 2x\cos(x^2)$ donc une primitive de f sur I est $\boxed{F : x \longmapsto \frac{1}{2}\sin(x^2)}$.