Feuille de calcul n°22 — Variables aléatoires – Corrigé

Exercice 1. Soit X une variable aléatoire dont la loi est donnée par le tableau suivant.

x_i	-2	-1	2	5
$\mathbf{P}(X = x_i)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$

Calculer la probabilité de chacun des évènements $\{X \leqslant 0\}$, $\{-1 \leqslant X \leqslant 5\}$ et $\{|X| = 2\}$.

Solution

- $\mathbf{P}(X \leqslant 0) = \mathbf{P}(X = -2) + \mathbf{P}(X = -1) = \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{6} = \dfrac{5}{12}$.
- $\mathbf{P}(-1 \leqslant X \leqslant 5) = \mathbf{P}(X = -1) + \mathbf{P}(X = 2) + \mathbf{P}(X = 5) = \dfrac{1}{6} + \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{4} = \dfrac{3}{4}$.

On peut aussi utiliser le fait que $\mathbf{P}(-1 \leqslant X \leqslant 5) = 1 - \mathbf{P}(X = -2) = 1 - \dfrac{1}{4} = \dfrac{3}{4}$.

- $\mathbf{P}(|X| = 2) = \mathbf{P}(X = -2) + \mathbf{P}(X = 2) = \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{3} = \dfrac{7}{12}$.

Exercice 2. On considère une variable aléatoire X telle que $X(\Omega) = [\![1, 10]\!]$ et telle qu'il existe un réel λ tel que, pour tout $n \in [\![1, 10]\!]$, $\mathbf{P}(X = n) = \lambda n^2$.

Déterminer la valeur de λ.

Solution Comme $X(\Omega) = [\![1, 10]\!]$, $\displaystyle\sum_{n=1}^{10} \lambda n^2 = 1$ donc, par linéarité, $\displaystyle\lambda \sum_{n=1}^{10} n^2 = 1$ c'est-à-dire $\lambda \times \dfrac{10 \times 11 \times 21}{6} = 1$. Ainsi, $5 \times 11 \times 7\lambda = 1$ donc $\lambda = \dfrac{1}{385}$.

Exercice 3. Soit X une variable aléatoire dont la loi est donnée par le tableau suivant.

x_i	0	2	4
$\mathbf{P}(X = x_i)$	$\frac{21}{32}$	$\frac{6}{32}$	$\frac{5}{32}$

Déterminer l'espérance et la variance de X.

Solution

- $\mathbf{E}(X) = 0 \times \dfrac{21}{32} + 2 \times \dfrac{6}{32} + 4 \times \dfrac{5}{32} = \dfrac{3}{8} + \frac{5}{8} = 1$.
- $\mathbf{E}(X^2) = 0^2 \times \dfrac{21}{32} + 2^2 \times \dfrac{6}{32} + 4^2 \times \dfrac{5}{32} = \dfrac{3}{4} + \frac{5}{2} = \dfrac{13}{4}$ donc, par la formule de König-Huygens,

$\mathbf{V}(X) = \mathbf{E}(X^2) - \mathbf{E}(X)^2 = \dfrac{13}{4} - 1^2 = \dfrac{9}{4}$.

Exercice 4. Le tableau suivant donne la loi d'une variable aléatoire X qui représente le gain algébrique à un jeu.

x_i	-5	-1	1	a
$\mathbf{P}(X = x_i)$	$\frac{3}{20}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{10}$

Déterminer a pour que le jeu soit équitable.

Solution Comme

$$\mathbf{E}(X) = (-5) \times \frac{3}{20} + (-1) \times \frac{1}{2} + 1 \times \frac{1}{4} + a \times \frac{1}{10} = -1 + \frac{a}{10},$$

le jeu est équitable si et seulement si $-1 + \dfrac{a}{10} = 0$ i.e. $a = 10$.

Exercice 5. Un urne contient 10 boules rouges et 5 boules noires. On tire simultanément 3 boules dans l'urne et on note X la variable aléatoire égale au nombre de boules noires tirées.

1. Déterminer la loi de probabilité de X.
2. Calculer l'espérance et la variance de X.
3. On suppose qu'on mise 1 euro pour tirer les trois boules de l'urne et qu'on remporte autant d'euros que de boules noires tirées. On note G le gain algébrique.
   a. Exprimer G en fonction de X.
   b. En déduire l'espérance et la variance de G.

Solution

1. Tout d'abord, $X(\Omega) = \{0\,;1\,;2\,;3\}$. Ensuite, par équiprobabilité des tirages,

$$\mathbf{P}(X = 0) = \frac{\binom{10}{3}}{\binom{15}{3}} = \frac{\frac{10\times9\times8}{3!}}{\frac{15\times14\times13}{3!}} = \frac{2 \times 5 \times 3 \times 3 \times 8}{3 \times 5 \times 2 \times 7 \times 13} = \frac{24}{91}$$

$$\mathbf{P}(X = 1) = \frac{\binom{5}{1} \times \binom{10}{2}}{\binom{15}{3}} = \frac{5 \times \frac{10\times9}{2}}{\frac{15\times14\times13}{3!}} = \frac{5 \times 5 \times 9}{5 \times 7 \times 13} = \frac{45}{91}$$

$$\mathbf{P}(X = 2) = \frac{\binom{5}{2} \times \binom{10}{1}}{\binom{15}{3}} = \frac{\frac{5\times4}{2} \times 10}{\frac{15\times14\times13}{3!}} = \frac{5 \times 2 \times 10}{5 \times 7 \times 13} = \frac{20}{91}$$

$$\mathbf{P}(X = 3) = \frac{\binom{5}{3}}{\binom{15}{3}} = \frac{\frac{5\times4\times3}{3!}}{\frac{15\times14\times13}{3!}} = \frac{5 \times 2 \times 2 \times 3}{3 \times 5 \times 2 \times 7 \times 13} = \frac{2}{91}$$

   Ainsi, la loi de X est donnée par le tableau suivant :

x_i	0	1	2	3
$\mathbf{P}(X = x_i)$	$\frac{24}{91}$	$\frac{45}{91}$	$\frac{20}{91}$	$\frac{2}{91}$

2. $\mathbf{E}(X) = 0 \times \dfrac{24}{91} + 1 \times \dfrac{45}{91} + 2 \times \dfrac{20}{91} + 3 \times \dfrac{2}{91} = 1$.

   De plus, $\mathbf{E}(X^2) = 0^2 \times \dfrac{24}{91} + 1^2 \times \dfrac{45}{91} + 2^2 \times \dfrac{20}{91} + 3^2 \times \dfrac{2}{91} = \dfrac{143}{91} = \dfrac{11}{7}$ donc, par la formule de König-Huygens, $\mathbf{V}(X) = \mathbf{E}(X^2) - \mathbf{E}(X)^2 = \dfrac{11}{7} - 1^2 = \dfrac{4}{7}$.

3. a. Par définition, $G = X - 1$.

   b. Par linéarité de l'espérance, $\mathbf{E}(G) = \mathbf{E}(X) - 1 = 0$ et, par propriété de la variance, $\mathbf{V}(G) = \mathbf{V}(X) = \dfrac{4}{7}$.