

Feuille de calcul n°21 — Équations différentielles

Exercice 1.

1. Résoudre sur \mathbb{R} l'équation différentielle $(E_1) : y' + 5y = 0$.
2. Résoudre sur \mathbb{R} l'équation différentielle $(E_2) : y = 3y'$.
3. Déterminer la solution sur \mathbb{R} de l'équation différentielle $(E_3) : y' + \frac{1}{2}y = 0$ telle que $y(0) = 1$.
4. Déterminer la solution sur \mathbb{R} de l'équation différentielle $(E_4) : y' - y = 0$ telle que $y'(0) = 1$.

Solution.

1. L'ensemble des solutions de (E_1) est $\boxed{\{t \mapsto Ce^{-5t} \mid C \in \mathbb{R}\}}$.
2. L'équation (E_2) est équivalente à $y' - \frac{1}{3}y = 0$ donc l'ensemble des solutions de (E_2) est $\boxed{\{t \mapsto Ce^{\frac{1}{3}t} \mid C \in \mathbb{R}\}}$.
3. L'ensemble des solutions de (E_3) est $\{t \mapsto Ce^{-\frac{1}{2}t} \mid C \in \mathbb{R}\}$. Soit $C \in \mathbb{R}$ et $f : t \mapsto Ce^{-\frac{1}{2}t}$. Alors,

$$f(0) = 1 \iff Ce^0 = 1 \iff C = 1.$$

Ainsi, l'unique solution y de (E_3) telle que $y(0) = 1$ est $\boxed{t \mapsto e^{-\frac{1}{2}t}}$.

4. L'ensemble des solutions de (E_4) est $\{t \mapsto Ce^t \mid C \in \mathbb{R}\}$. Soit $C \in \mathbb{R}$ et $f : t \mapsto Ce^t$. Alors, par définition $f' = f$ donc

$$f'(0) = 1 \iff Ce^0 = 1 \iff C = 1.$$

Ainsi, l'unique solution y de (E_4) telle que $y'(0) = 1$ est $\boxed{\text{la fonction exponentielle}}$.

Exercice 2.

1. Résoudre sur \mathbb{R} l'équation différentielle $(E_1) : y'' - 3y' + 2y = 0$.
2. Résoudre sur \mathbb{R} l'équation différentielle $(E_2) : y'' + y' + \frac{1}{4}y = 0$.
3. Résoudre sur \mathbb{R} l'équation différentielle $(E_3) : y'' - 2y' + 5y = 0$.

Solution.

1. L'équation caractéristique associée à (E_1) est $(C_1) : x^2 - 3x + 2 = 0$. Son discriminant est $\Delta = (-3)^2 - 4 \times 1 \times 2 = 1 > 0$ donc (C_1) possède deux solutions réelles :

$$x_1 = \frac{-(-3) - \sqrt{1}}{2 \times 1} = 1 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-(-3) + \sqrt{1}}{2 \times 1} = 2.$$

Ainsi, par théorème, l'ensemble des solutions de (E_1) est

$$\boxed{\{t \mapsto Ae^t + Be^{2t} \mid (A, B) \in \mathbb{R}^2\}}.$$

2. L'équation caractéristique associée à (E_2) est $(C_2) : x^2 + x + \frac{1}{4} = 0$. Son discriminant est $\Delta = 1^2 - 4 \times 1 \times \frac{1}{4} = 0$ donc (C_2) possède une unique solution réelle :

$$x_0 = \frac{-1}{2 \times 1} = -\frac{1}{2}.$$

Ainsi, par théorème, l'ensemble des solutions de (E_2) est

$$\boxed{\{t \mapsto (At + B)e^{-\frac{1}{2}t} \mid (A, B) \in \mathbb{R}^2\}}.$$

3. L'équation caractéristique associée à (E_3) est $(C_3) : x^2 - 2x + 5 = 0$. Son discriminant est $\Delta = (-2)^2 - 4 \times 1 \times 5 = -16 < 0$ donc (C_1) possède deux solutions complexes conjuguées :

$$x_1 = \frac{-(-2) - i\sqrt{16}}{2 \times 1} = 1 - 2i \quad \text{et} \quad x_2 = \overline{x_1} = 1 + 2i.$$

Ainsi, par théorème, l'ensemble des solutions de (E_2) est

$$\boxed{\{t \mapsto e^t(A \cos(2t) + B \sin(2t)) \mid (A, B) \in \mathbb{R}^2\}}.$$

Exercice 3.

1. Résoudre sur \mathbb{R} l'équation différentielle $(E_1) : y' - 3y = 4$. On cherche une solution particulière constante.
2. Résoudre sur \mathbb{R} l'équation différentielle $(E_2) : y' + 3y = 2t$. On cherchera une solution particulière sous la forme d'une fonction affine.
3. Déterminer la solution sur \mathbb{R} de l'équation différentielle $(E_3) : y' + 7y = e^{-t}$ telle que $y(0) = 1$. On cherchera une solution particulière sous la forme $t \mapsto Ae^{-t}$ où $A \in \mathbb{R}$.
4. Déterminer la solution sur \mathbb{R} de l'équation différentielle $(E_4) : y' - y = \cos(t)$ telle que $y'(0) = 1$. On cherchera une solution particulière sous la forme $t \mapsto A \cos(t) + B \sin(t)$ où $(A, B) \in \mathbb{R}^2$.

Solution.

1. L'ensemble des solutions de l'équation $(H_1) : y' - 3y = 0$ est $\{t \mapsto Ce^{3t} \mid C \in \mathbb{R}\}$.

Considérons une fonction constante $g : t \mapsto a$ où $a \in \mathbb{R}$. Alors, pour tout réel t , $g'(t) - 3g(t) = -3a$ donc g est solution de (E_1) si et seulement si $-3a = 4$ i.e. $a = -\frac{4}{3}$.

Par théorème, on conclut que l'ensemble des solutions de (E_1) est

$$\boxed{\left\{ t \mapsto Ce^{3t} - \frac{4}{3} \mid C \in \mathbb{R} \right\}}.$$

2. L'ensemble des solutions de l'équation $(H_2) : y' + 3y = 0$ est $\{t \mapsto Ce^{-3t} \mid C \in \mathbb{R}\}$.

Considérons une fonction affine $g : t \mapsto at + b$ où $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Alors, pour tout réel t , $g'(t) + 3g(t) = a + 3(at + b) = 3at + a + 3b$ donc, pour que g soit solution de (E_2) , il suffit que $3a = 2$ et $a + 3b = 0$ i.e. $a = \frac{2}{3}$ et $b = -\frac{2}{9}$.

Par théorème, on conclut que l'ensemble des solutions de (E_1) est

$$\boxed{\left\{ t \mapsto Ce^{-3t} + \frac{2}{3}t - \frac{2}{9} \mid C \in \mathbb{R} \right\}}.$$

3. L'ensemble des solutions de l'équation $(H_3) : y' + 7y = 0$ est $\{t \mapsto Ce^{-7t} \mid C \in \mathbb{R}\}$.

Considérons une fonction de la forme $g : t \mapsto Ae^{-t}$ où $A \in \mathbb{R}$. Alors, pour tout réel t , $g'(t) + 7g(t) = -Ae^{-t} + 7Ae^{-t} = 6Ae^{-t}$ donc, pour que g soit solution de (E_3) , il suffit que $6a = 1$ i.e. $a = \frac{1}{6}$. Par théorème, on en déduit que l'ensemble des solutions de (E_3) est $\left\{ t \mapsto Ce^{-7t} + \frac{1}{6}e^{-t} \mid C \in \mathbb{R} \right\}$.

Soit $C \in \mathbb{R}$ et $f : t \mapsto Ce^{-7t} + \frac{1}{6}e^{-t}$. Alors,

$$f(0) = 1 \iff Ce^0 + \frac{1}{6}e^0 = 1 \iff C + \frac{1}{6} = 1 \iff C = \frac{5}{6}.$$

Ainsi, l'unique solution y de (E_3) telle que $y(0) = 1$ est $t \mapsto \frac{5}{6}e^{-7t} + \frac{1}{6}e^{-t}$.

4. L'ensemble des solutions de l'équation $(H_3) : y' - y = 0$ est $\{t \mapsto Ce^t \mid C \in \mathbb{R}\}$.

Considérons deux réels A et B et la fonction $g : t \mapsto A \cos(t) + B \sin(t)$. Alors, pour tout réel t ,

$$g'(t) - g(t) = -A \sin(t) + B \cos(t) - (A \cos(t) + B \sin(t)) = (B - A) \cos(t) + (-A - B) \sin(t)$$

donc, pour que g soit solution de (E_4) , il suffit que $B - A = 1$ i.e. $-A - B = 0$ i.e. $A = -B$ et $B - (-B) = 1$ soit $B = \frac{1}{2}$ et $A = -\frac{1}{2}$. Par théorème, on en déduit que

l'ensemble des solutions de (E_4) est $\left\{ t \mapsto Ce^t - \frac{1}{2} \cos(t) + \frac{1}{2} \sin(t) \mid C \in \mathbb{R} \right\}$.

Soit $C \in \mathbb{R}$ et $f : t \mapsto Ce^t - \frac{1}{2} \cos(t) + \frac{1}{2} \sin(t)$. Alors, pour tout réel t , $f'(t) = Ce^t + \frac{1}{2} \sin(t) + \frac{1}{2} \cos(t)$ donc

$$f'(0) = 1 \iff Ce^0 + \frac{1}{2} \cos(0) + \frac{1}{2} \sin(0) = 1 \iff C + \frac{1}{2} = 1 \iff C = \frac{1}{2}.$$

Ainsi, l'unique solution y de (E_4) telle que $y'(0) = 1$ est $t \mapsto \frac{1}{2}e^t - \frac{1}{2} \cos(t) + \frac{1}{2} \sin(t)$.

Exercice 4.

1. Résoudre sur \mathbb{R} l'équation différentielle $(E_1) : y'' - 5y' + 6y = 3t + 2$. On cherchera une solution particulière sous la forme d'une fonction affine.
2. Résoudre sur \mathbb{R} l'équation différentielle $(E_2) : y'' + 4y' + 4y = e^{-2t}$. On cherchera une solution particulière sous la forme $t \mapsto at^2e^{-2t}$ où $a \in \mathbb{R}$.
3. Déterminer la solution sur \mathbb{R} de l'équation différentielle $(E_3) : y'' + y' + \frac{1}{2}y = \cos(t)$ telle que $y(0) = y'(0) = 1$. On cherchera une solution particulière sous la forme $t \mapsto a \cos(t) + b \sin(t)$ avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

Solution.

1. Considérons l'équation homogène $(H_1) : y'' - 5y' + 6y = 0$ et l'équation caractéristique associée $(C_1) : x^2 - 5x + 6 = 0$. Le discriminant de cette dernière est $\Delta = (-5)^2 - 4 \times 1 \times 6 = 1 > 0$ donc (C_1) admet deux solutions réelles :

$$x_1 = \frac{-(-5) - \sqrt{1}}{2 \times 1} = 2 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-(-5) + \sqrt{1}}{2 \times 1} = 3$$

donc l'ensemble des solutions de (H_1) est $\{t \mapsto Ae^{2t} + Be^{3t} \mid (A, B) \in \mathbb{R}^2\}$.

Soit a et b deux réels et $g : t \mapsto at + b$. Alors, pour tout réel t , $g''(t) - 5g'(t) + 6g(t) = 0 - 5a + 6(at + b) = 6at - 5a + 6b$ donc, pour que g soit solution de (E_1) , il suffit que $6a = 3$ et $-5a + 6b = 2$ i.e. $a = \frac{1}{2}$ et $b = \frac{3}{4}$.

On conclut que l'ensemble des solutions de (E_1) est

$$\boxed{\left\{ t \mapsto Ae^{2t} + Be^{3t} + \frac{1}{2}t + \frac{3}{4} \mid (A, B) \in \mathbb{R}^2 \right\}}.$$

2. Considérons l'équation homogène $(H_2) : y'' + 4y' + 4y = 0$ et l'équation caractéristique associée $(C_2) : x^2 + 4x + 4 = 0$. Le discriminant de cette dernière est $\Delta = 4^2 - 4 \times 1 \times 4 = 0$ donc (C_2) admet deux solutions réelles :

$$x_1 = \frac{-4}{2 \times 1} = -2$$

donc l'ensemble des solutions de (H_2) est $\{t \mapsto (At + B)e^{-2t} \mid (A, B) \in \mathbb{R}^2\}$.

Soit a un réel et $g : t \mapsto at^2e^{-2t}$. Alors, pour tout réel t , $g'(t) = a(2te^{-2t} + t^2(-2e^{-2t})) = 2a(t - t^2)e^{-2t}$ et $g''(t) = 2a((1 - 2t)e^{-2t} + (t - t^2)(-2e^{-2t})) = 2a(1 - 4t + 2t^2)e^{-2t}$ donc

$$g''(t) + 4g'(t) + 4g(t) = 2a(1 - 4t + 2t^2)e^{-2t} + 8a(t - t^2)e^{-2t} + 4at^2e^{-2t} = 2ae^{-2t}.$$

Ainsi, pour que g soit solution de (E_2) , il suffit que $2a = 1$ i.e. $a = \frac{1}{2}$.

On conclut que l'ensemble des solutions de (E_1) est

$$\boxed{\left\{ t \mapsto \left(\frac{1}{2}t^2 + At + B \right) e^{-2t} \mid (A, B) \in \mathbb{R}^2 \right\}}.$$

3. Considérons l'équation homogène $(H_3) : y'' + y' + \frac{1}{2}y = 0$ et l'équation caractéristique associée $(C_3) : x^2 + x + \frac{1}{2} = 0$. Le discriminant de cette dernière est $\Delta = 1^2 - 4 \times 1 \times \frac{1}{2} = -1 < 0$ donc (C_3) admet deux solutions complexes conjuguées :

$$x_1 = \frac{-1 - i\sqrt{1}}{2 \times 1} = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i \quad \text{et} \quad x_2 = \overline{x_1} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$$

donc l'ensemble des solutions de (H_3) est $\{t \mapsto e^{-\frac{1}{2}t}(A \cos(\frac{1}{2}t) + B \sin(\frac{1}{2}t)) \mid (A, B) \in \mathbb{R}^2\}$.

Soit a et b deux réels et $g : t \mapsto a \cos(t) + b \sin(t)$. Alors, pour tout réel t , $g'(t) = -a \sin(t) + b \cos(t)$ et $g''(t) = -a \cos(t) - b \sin(t)$ donc

$$\begin{aligned} g''(t) + g'(t) + \frac{1}{2}g(t) &= -a \cos(t) - b \sin(t) + (-a \sin(t) + b \cos(t)) + \frac{1}{2}(a \cos(t) + b \sin(t)) \\ &= \left(-\frac{1}{2}a + b \right) \cos(t) + \left(-a - \frac{1}{2}b \right) \sin(t). \end{aligned}$$

Ainsi, pour que g soit solution de (E_3) , il suffit que $-\frac{1}{2}a + b = 1$ et $-a - \frac{1}{2}b = 0$ i.e.

$$a = -\frac{1}{2}b \text{ et } \frac{5}{4}b = 1 \text{ soit } b = \frac{4}{5} \text{ et } a = -\frac{2}{5}.$$

On conclut que l'ensemble des solutions de (E_3) est

$$\boxed{\left\{ t \mapsto e^{-\frac{1}{2}t} \left(A \cos\left(\frac{1}{2}t\right) + B \sin\left(\frac{1}{2}t\right) \right) - \frac{2}{5} \cos(t) + \frac{4}{5} \sin(t) \mid (A, B) \in \mathbb{R}^2 \right\}}.$$