Feuille de calcul n°21 — Calculs de limites et de dérivées (II) — Corrigé

Exercice 1. Calculer les limites suivantes.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^3+x}{x^2+1} \qquad \lim_{x\to+\infty} \sqrt{x+1}-\sqrt{x} \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{\arctan(x)}{x^2} \qquad \lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x^2+4x-5}$$

$$\lim_{x\to+\infty} \ln(2)^x \qquad \lim_{x\to+\infty} x^2+\sin(x) \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{x+\sin(x)}{x+\cos(x)} \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{e}^x-1}{\mathrm{e}^{2x}+\mathrm{e}^x-2}$$

Solution. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^3+x}{x^2+1} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^3}{x^2} = \lim\limits_{x\to+\infty} x$ donc $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^3+x}{x^2+1} = +\infty}$.

Pour tout réel $x>0$,

$$\sqrt{x+1}-\sqrt{x} = \frac{\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}} = \frac{(x+1)-x}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}.$$

Or, par composition et somme, $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x+1}+\sqrt{x} = +\infty$ donc, par quotient, on conclut $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x+1}-\sqrt{x} = 0}$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} \arctan(x) = \dfrac{\pi}{2}$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$ donc, par quotient, $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\arctan(x)}{x^2} = 0}$.

Pour tout réel x, $x^2+4x-5 = (x-1)(x+5)$ donc, pour tout réel x différent de -5 et 1,

$$\frac{x^2-1}{x^2+4x-5} = \frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(x+5)} = \frac{x+1}{x+5}$$

et $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x+1}{x+5} = \dfrac{2}{6} = \dfrac{1}{3}$ donc $\boxed{\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-1}{x^2+4x-5} = \dfrac{1}{3}}$.

Pour tout réel x, $\ln(2)^x = \mathrm{e}^{x\ln(\ln(2))}$. Or, $\ln(2)<1$ donc $\ln(\ln(2))<0$ et ainsi $\lim\limits_{x\to+\infty} x\ln(\ln(2)) = -\infty$. Or, $\lim\limits_{X\to-\infty} \mathrm{e}^X = 0$ donc, par composition, $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(2)^x = 0}$.

Pour tout réel x, $\sin(x) \geqslant -1$ donc $x^2+\sin(x) \geqslant x^2-1$. Or, $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2-1 = +\infty$ donc, par le théorème de comparaison, $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} x^2+\sin(x) = +\infty}$.

Pour tout réel $x>1$, $-1 \leqslant \sin(x) \leqslant 1$ donc [$*$] $0 < x-1 \leqslant x+\sin(x) \leqslant x+1$ et $-1 \leqslant \cos(x) \leqslant 1$ donc $0 < x-1 \leqslant x+\cos(x) \leqslant x+1$. Par décroissance de la fonction inverse sur $]0\,;+\infty[$, on déduit de la dernière inégalité que [$**$] $\dfrac{1}{x+1} \leqslant \dfrac{1}{x+\cos(x)} \leqslant \dfrac{1}{x-1}$.

Comme [$*$] et [$**$] portent sur des nombres positifs, on peut les multiplier membre à membre, ce qui donne

$$\frac{x-1}{x+1} \leqslant \frac{x+\sin(x)}{x+\cos(x)} \leqslant \frac{x+1}{x-1}.$$

Or, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x-1}{x+1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}1=1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x+1}{x-1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}1=1$ donc, par le théorème d'encadrement, $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x+\sin(x)}{x+\cos(x)}=1}$.

Pour tout réel x, $\mathrm{e}^{2x}+\mathrm{e}^{x}-2=(\mathrm{e}^{x})^2+\mathrm{e}^{x}-2=(\mathrm{e}^{x}-1)(\mathrm{e}^{x}+2)$ donc, pour tout réel $x>0$,

$$\frac{\mathrm{e}^{x}-1}{\mathrm{e}^{2x}+\mathrm{e}^{x}-2}=\frac{\mathrm{e}^{x}-1}{(\mathrm{e}^{x}-1)(\mathrm{e}^{x}+2)}=\frac{1}{\mathrm{e}^{x}+2}$$

Or, par continuité, $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{\mathrm{e}^{x}+2}=\dfrac{1}{3}$ donc $\boxed{\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\mathrm{e}^{x}-1}{\mathrm{e}^{2x}+\mathrm{e}^{x}-2}=\dfrac{1}{3}}$.

Exercice 2. Calculer les limites suivantes.

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{-10\,\mathrm{e}^{x}}{x^{-4}}\qquad \lim_{x\to+\infty}\ln(x)^2-\mathrm{e}^{x}\qquad \lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\ln(x)}\qquad \lim_{x\to0^+}\ln(x)+\frac{1}{x^2}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\mathrm{e}^{x+1}}{x^2}\qquad \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x+1)}{x^3}\qquad \lim_{x\to+\infty}\frac{x^{2024}}{\mathrm{e}^{x^2}}\qquad \lim_{x\to+\infty}\frac{\mathrm{e}^{x}-x}{2\,\mathrm{e}^{x}+3}$$

Solution

Pour tout réel $x<0$, $\dfrac{-10\,\mathrm{e}^{x}}{x^{-4}}=-10x^4\,\mathrm{e}^{x}$ donc, par croissance comparée, $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-10\,\mathrm{e}^{x}}{x^{-4}}=0}$.

Pour tout réel $x>0$, $\ln(x)^2-\mathrm{e}^{x}=x\left(\dfrac{\ln(x)^2}{x}-\dfrac{\mathrm{e}^{x}}{x}\right)$ et, par croissances comparées, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(x)^2}{x}=0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\mathrm{e}^{x}}{x}=+\infty$ donc, par différence et produit, $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(x)^2-\mathrm{e}^{x}=-\infty}$.

Par croissance comparée, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(x)}{x}=0^+$ donc, par inverse, $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{\ln(x)}=+\infty}$.

Pour tout réel $x>0$, $\ln(x)+\dfrac{1}{x^2}=\dfrac{x^2\ln(x)+1}{x^2}$. Or, par croissance comparée, $\lim\limits_{x\to0^+}x^2\ln(x)=0$ donc, par somme et quotient, $\boxed{\lim\limits_{x\to0^+}\ln(x)+\dfrac{1}{x^2}=+\infty}$.

Pour tout réel $x>0$, $\dfrac{\mathrm{e}^{x+1}}{x^2}=e\times\dfrac{\mathrm{e}^{x}}{x^2}$. Or, par croissance comparée, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x^2}=+\infty$ donc, comme $e>0$, $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\mathrm{e}^{x+1}}{x^2}=+\infty}$.

Pour tout réel $x>0$,

$$\frac{\ln(x+1)}{x^3}=\frac{1}{x^3}\ln\left(x\left(\frac{1}{x}+1\right)\right)=\frac{\ln(x)}{x^3}+\frac{1}{x^3}\ln\left(\frac{1}{x}+1\right)$$

Or, par croissance comparée, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(x)}{x^3}=0$ et, par composition et produit, $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{x^3}\ln\left(\dfrac{1}{x}+1\right)=0$ donc, par somme, $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(x+1)}{x^3}=0}$.

Pour tout réel x, $\dfrac{x^{2024}}{\mathrm{e}^{x^2}}=\dfrac{(x^2)^{1012}}{x^2}$. Or, $\lim\limits_{x\to+\infty}x^2=+\infty$ et, par croissance comparée, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\mathrm{e}^{X}}{X^{1012}}=+\infty$ donc, par composition, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\mathrm{e}^{x^2}}{x^{2024}}=+\infty$ et, par inverse, $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^{2024}}{\mathrm{e}^{x^2}}=0}$.

Pour tout réel $x > 0$, $\dfrac{\mathrm{e}^{x} - x}{2\mathrm{e}^{x} + 3} = \dfrac{\mathrm{e}^{x}\left(1 - \frac{x}{\mathrm{e}^{x}}\right)}{\mathrm{e}^{x}\left(2 + \frac{3}{\mathrm{e}^{x}}\right)} = \dfrac{1 - \frac{x}{\mathrm{e}^{x}}}{2 + \frac{3}{\mathrm{e}^{x}}}$. Or, par croissance comparée, $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\mathrm{e}^{x}}{x} = +\infty$ donc, par inverse, $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{x}{\mathrm{e}^{x}} = 0$. De plus, comme $\lim\limits_{x \to +\infty} \mathrm{e}^{x} = +\infty$, par quotient, $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3}{\mathrm{e}^{x}} = 0$ donc, par somme et quotient, $\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\mathrm{e}^{x} - x}{2\mathrm{e}^{x} + 3} = \dfrac{1}{2}}$.

Exercice 3. Calculer les limites suivantes en reconnaissant un taux de variation.

1. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\tan(x)}{x}$ **2.** $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin(3x)}{x}$ **3.** $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\mathrm{e}^{x} - e}{x - 1}$ **4.** $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\arctan(x)}{x}$ **5.** $\lim\limits_{x \to e} \dfrac{\ln(x) - 1}{x - e}$

Solution.

1. Pour tout réel $x \in \left]-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}\right[\setminus \{0\}$, $\dfrac{\tan(x)}{x} = \dfrac{\tan(x) - \tan(0)}{x - 0}$ donc, comme tan est dérivable en 0, $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\tan(x)}{x} = \tan'(0) = 1 + \tan^2(0)$ donc $\boxed{\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\tan(x)}{x} = 1}$.

2. Pour tout réel $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $\dfrac{\sin(3x)}{x} = \dfrac{g(3x) - g(0)}{x - 0}$ où $g : x \longmapsto \sin(3x)$. Comme g est dérivable en 0, $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin(3x)}{x} = g'(0) = 3\cos(3 \times 0)$ donc $\boxed{\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin(3x)}{x} = 3}$.

3. Pour tout réel $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$, $\dfrac{\mathrm{e}^{x} - e}{x - 1} = \dfrac{\mathrm{e}^{x} - \mathrm{e}^{1}}{x - 1}$ donc, comme exp est dérivable en 1, $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\mathrm{e}^{x} - e}{x - 1} = \exp'(1) = \exp(1)$ donc $\boxed{\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\mathrm{e}^{x} - e}{x - 1} = e}$.

4. Pour tout réel $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $\dfrac{\arctan(x)}{x} = \dfrac{\arctan(x) - \arctan(0)}{x - 0}$ donc, comme arctan est dérivable en 0, $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\arctan(x) - \arctan(0)}{x - 0} = \arctan'(0) = \dfrac{1}{1 + 0^2}$ donc $\boxed{\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\arctan(x)}{x} = 1}$.

5. Pour tout réel $x \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{e\}$, $\dfrac{\ln(x) - 1}{x - e} = \dfrac{\ln(x) - \ln(e)}{x - e}$ donc, comme ln est dérivable en e, $\lim\limits_{x \to e} \dfrac{\ln(x) - \ln(e)}{x - e} = \ln'(e) = \dfrac{1}{e}$ donc $\boxed{\lim\limits_{x \to e} \dfrac{\ln(x) - 1}{x - e} = \dfrac{1}{e}}$.

Exercice 4. Dans chaque cas, calculer $f'(x)$ pour tout réel $x \in D$.

1. $f : x \longmapsto \arctan(\sqrt{x})$ avec $D = \mathbb{R}_+^*$

2. $f : x \longmapsto \dfrac{x \ln(x)}{x + 1}$ avec $D = \mathbb{R}_+^*$

3. $f : x \longmapsto \arctan(\sin(x))$ avec $D = \mathbb{R}$

4. $f : x \longmapsto \sqrt[3]{\sin^2(3x) + 1}$ avec $D = \mathbb{R}$

5. $f : x \longmapsto \ln(\arctan(x))$ avec $D = \mathbb{R}_+^*$

6. $f : x \longmapsto x^3 \sqrt[5]{x}$ avec $D = \mathbb{R}_+^*$

Solution.

1. Pour tout réel $x > 0$,

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \times \frac{1}{1 + \sqrt{x}^2} = \frac{1}{2\sqrt{x}(1 + x)}.$$

2. Pour tout réel $x > 0$,

$$f'(x) = \frac{(1 \times \ln(x) + x \times \frac{1}{x})(x+1) - x\ln(x) \times 1}{(x+1)^2} = \frac{(\ln(x)+1)(x+1) - x\ln(x)}{(x+1)^2}$$

donc, pour tout réel $x > 0$, $f'(x) = \dfrac{\ln(x) + x + 1}{(x+1)^2}$.

3. Pour tout réel x,

$$f'(x) = \cos(x) \times \frac{1}{1+\sin^2(x)} = \frac{\cos(x)}{1+\sin^2(x)}.$$

4. Pur tout réel x,

$$f'(x) = 2\times 3\cos(3x)\times\sin(3x)\times\frac{1}{3\sqrt[3]{\left(\sin^2(3x)+1\right)^2}} = \frac{2\cos(3x)\sin(3x)}{\sqrt[3]{(\sin^2(x)+1)^2}} = \frac{\sin(6x)}{\sqrt[3]{(\sin^2(x)+1)^2}}$$

5. Pour tout réel $x > 0$,

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{1+x^2}}{\arctan(x)} = \frac{1}{(1+x^2)\arctan(x)}$$

6. Pour tout réel $x > 0$,

$$f'(x) = 3x^2\sqrt[5]{x} + x^3 \times \frac{1}{5\sqrt[5]{x^4}} = 3x^2\sqrt[5]{x} + x^3 \times \frac{\sqrt[5]{x}}{5x} = \frac{16}{5}x^2\sqrt[5]{x}.$$