

Feuille de calcul n°20 — Polynômes

Exercice 1. On considère les polynômes $P = X^2 + 1$ et $Q = X^3 - X + 2$. Déterminer $P + Q$, $P - Q$, PQ , $Q \circ P$ et $P \circ Q$.

Solution.

$$P + Q = X^2 + 1 + X^3 - X + 2 \text{ donc } \boxed{P + Q = X^3 + X^2 - X + 3}$$

$$P - Q = X^2 + 1 - (X^3 - X + 2) = X^2 + 1 - X^3 + X - 2 \text{ donc } \boxed{P - Q = -X^3 + X^2 + X - 1}$$

$$PQ = (X^2 + 1)(X^3 - X + 2) = X^5 - X^3 + 2X^2 + X^3 - X + 2 \text{ donc } \boxed{PQ = X^5 + 2X^2 - X + 2}$$

$$Q \circ P = Q(X^2 + 1) = (X^2 + 1)^3 - (X^2 + 1) + 2 = (X^2)^3 + 3(X^2)^2 \times 1 + 3X^2 \times 1^2 + 1^3 - X^2 - 1 + 2$$

donc $\boxed{Q \circ P = X^6 + 3X^4 + 2X^2 + 2}$

$$P \circ Q = P(X^3 - X + 2) = (X^3 - X + 2)^2 + 1 = (X^3 - X + 2)(X^3 - X + 2) + 1$$

$$= X^6 - X^4 + 2X^3 - X^4 + X^2 - 2X + 2X^3 - 2X + 4 + 1$$

donc $\boxed{P \circ Q = X^6 - 2X^4 + 4X^3 + X^2 - 4X + 5}$

Exercice 2. Dans chacun des cas suivants, déterminer si a est une racine de P et, le cas échéant, préciser s'il s'agit d'une racine multiple ou non.

1. $P = X^2 - 3X + 2$ et $a = 1$
2. $P = X^2 - X + 2$ et $a = -1$
3. $P = X^3 - 5X^2 + 8X - 4$ et $a = 2$
4. $P = X^3 - 5X^2 + 8X - 4$ et $a = 1$
5. $P = X^5 + 3X + 2$ et $a = -1$

Solution.

1. $P(1) = 1^2 - 3 \times 1 + 2 = 0$ donc 1 est une racine de P . De plus, $P' = 2X - 3$ donc $P'(1) = 2 \times 1 - 3 \neq 0$ donc $\boxed{1 \text{ est une racine simple de } P}$.

2. $P(-1) = (-1)^2 - (-1) + 2 = 2 \neq 0$ donc $\boxed{-1 \text{ n'est pas une racine de } P}$.

3. $P(2) = 2^3 - 5 \times 2^2 + 8 \times 2 - 4 = 8 - 20 + 16 - 4 = 0$ donc 2 est une racine de P . De plus, $P' = 3X^2 - 10X + 8$ donc $P'(2) = 3 \times 2^2 - 10 \times 2 + 8 = 12 - 20 + 8 = 0$ donc $\boxed{2 \text{ est une racine multiple de } P}$.

4. $P(1) = 1^3 - 5 \times 1^2 + 8 \times 1 - 4 = 1 - 5 + 8 - 4 = 0$ donc 1 est une racine de P . De plus, $P' = 3X^2 - 10X + 8$ donc $P'(1) = 3 \times 1^2 - 10 + 8 = 1 \neq 0$ donc $\boxed{1 \text{ est une racine simple de } P}$.

5. $P(-1) = (-1)^5 + 3 \times (-1) + 2 = -1 - 3 + 2 = -2 \neq 0$ donc $\boxed{-1 \text{ n'est pas une racine de } P}$.

Exercice 3. Dans chaque cas, factoriser le polynôme P dans $\mathbb{R}[X]$.

1. $P = -X^2 - 5X$
2. $P = 2X^2 - 2$
3. $P = 3X^2 + 3X - 6$
4. $P = 2X^2 - 4X - 2$
5. $P = 3X^2 - 7X - 6$

Solution.

1. $P = -X(X + 5)$.

2. $P = 2(X^2 - 1)$ donc $P = 2(X - 1)(X + 1)$.

3. $P = 3(X^2 + X - 2)$. Or, le discriminant de $X^2 + X - 2$ est $\Delta = 1^2 - 4 \times 1 \times (-2) = 9 > 0$ donc ce trinôme possède deux racines réelles :

$$x_1 = \frac{-1 - \sqrt{9}}{2 \times 1} = -2 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-1 + \sqrt{9}}{2 \times 1} = 1$$

On en déduit que $X^2 + X - 2 = (X - (-2))(X - 1) = (X + 2)(X - 1)$ donc $P = 3(X + 2)(X - 1)$.

4. $P = 2(X^2 - 2X - 1)$ et le discriminant de $X^2 - 2X - 1$ est $\Delta = (-2)^2 - 4 \times 1 \times (-1) = 8$ donc ce trinôme possède deux racines réelles :

$$x_1 = \frac{-(-2) - \sqrt{8}}{2 \times 1} = \frac{2 - 2\sqrt{2}}{2} = 1 - \sqrt{2} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-(-2) + \sqrt{8}}{2 \times 1} = \frac{2 + 2\sqrt{2}}{2} = 1 + \sqrt{2}.$$

Ainsi, $X^2 - 2X - 1 = (X - (1 - \sqrt{2}))(X - (1 + \sqrt{2})) = (X - 1 + \sqrt{2})(X - 1 - \sqrt{2})$ donc $P = 2(X - 1 + \sqrt{2})(X - 1 - \sqrt{2})$.

5. Le discriminant de P est $\Delta = (-7)^2 - 4 \times 3 \times (-6) = 49 + 72 = 121$ donc P possède deux racines réelles :

$$x_1 = \frac{-(-7) - \sqrt{121}}{2 \times 3} = \frac{7 - 11}{6} = -\frac{2}{3} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-(-7) + \sqrt{121}}{2 \times 3} = \frac{7 + 11}{6} = 3$$

donc $P = 3(X - (-\frac{2}{3}))(X - 3) = 3(X + \frac{2}{3})(X - 3)$ soit $P = (3X + 2)(X - 3)$.

Exercice 4. Dans chacun des cas suivants, factoriser P dans $\mathbb{R}[X]$ (après avoir éventuellement déterminer une racine « évidente »).

1. $P = X^3 - 25X$
2. $P = X^3 - 2X^2 - 5X + 6$
3. $P = 3X^3 + 3X^2 - 6X - 6$
4. $P = X^4 - 5X^2 + 4$
5. $P = X^4 - 1$

Solution.

1. $P = X(X^2 - 25)$ donc $P = X(X - 5)(X + 5)$.

2. On remarque que $P(1) = 1^3 - 2 \times 1^2 - 5 \times 1 + 6 = 0$ donc P se factorise par $X - 1$. Ainsi, il existe des réels a , b et c tels que $P = (X - 1)(aX^2 + bX + c)$. Or, pour tous réels a , b et c ,

$$\begin{aligned}(X - 1)(aX^2 + bX + c) &= aX^3 + bX^2 + cX - aX^2 - bX - c \\ &= aX^3 + (b - a)X^2 + (c - b)X - c\end{aligned}$$

donc

$$P = (X - 1)(aX^2 + bX + c) \iff \begin{cases} a = 1 \\ b - a = -2 \\ c - b = -5 \\ -c = 6 \end{cases} \iff \begin{cases} a = 1 \\ b = -1 \\ c = -6 \end{cases}$$

Ainsi, $P = (X - 1)(X^2 - X - 6)$. De plus, le discriminant de $X^2 - X - 6$ est $\Delta = (-1)^2 - 4 \times 1 \times (-6) = 25$ donc ce trinôme possède deux racines réelles :

$$x_1 = \frac{-(-1) - \sqrt{25}}{2 \times 1} = -2 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-(-1) + \sqrt{25}}{2 \times 1} = 3$$

donc $X^2 - X - 6 = (X - (-2))(X - 3) = (X + 2)(X - 3)$ et ainsi $P = (X - 1)(X + 2)(X - 3)$

3. On remarque que $P(-1) = 3(-1)^3 + 3(-1)^2 - 6(-1) - 6 = 0$ donc P se factorise par $X - (-1) = X + 1$. Ainsi, il existe des réels a , b et c tels que $P = (X + 1)(aX^2 + bX + c)$. Or, pour tous réels a , b et c ,

$$\begin{aligned}(X + 1)(aX^2 + bX + c) &= aX^3 + bX^2 + cX + aX^2 + bX + c \\ &= aX^3 + (a + b)X^2 + (b + c)X + c\end{aligned}$$

donc

$$P = (X + 1)(aX^2 + bX + c) \iff \begin{cases} a = 3 \\ a + b = 3 \\ b + c = -6 \\ c = -6 \end{cases} \iff \begin{cases} a = 3 \\ b = 0 \\ c = -6 \end{cases}$$

Ainsi, $P = (X + 1)(3X^2 - 6) = 3(X + 1)(X^2 - 2)$ et ainsi $P = 3(X + 1)(X - \sqrt{2})(X + \sqrt{2})$.

4. On remarque que $P = (X^2)^2 - 5X^2 + 4$ donc, si on pose $Q = X^2 - 5X + 4$ alors $P = Q(X^2)$. Or, le discriminant de Q est $\Delta = (-5)^2 - 4 \times 1 \times 4 = 9 > 0$ donc ce trinôme possède deux racines réelles :

$$x_1 = \frac{-(-5) - \sqrt{9}}{2 \times 1} = 1 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-(-5) + \sqrt{9}}{2 \times 1} = 4$$

donc $Q = (X - 1)(X - 4)$. Par suite, $P = Q(X^2) = (X^2 - 1)(X^2 - 4)$ et on conclut donc que $P = (X - 1)(X + 1)(X - 2)(X + 2)$.

5. $P = X^4 - 1 = (X^2)^2 - 1^2 = (X^2 - 1)(X^2 + 1) = (X - 1)(X + 1)(X^2 + 1)$. De plus, le trinôme $X^2 + 1$ n'a pas de racines réelles (puisqu'il est toujours strictement positif) donc il ne se factorise pas dans \mathbb{R} . Ainsi, $P = (X - 1)(X + 1)(X^2 + 1)$.