Feuille de calcul n°20 — Calcul matriciel – Corrigés

Exercice 1. On considère les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 7 & -4 \end{pmatrix}.$$

Calculer :

1. $A+B$ **2.** $2A-B$ **3.** AB **4.** BA **5.** ${}^tB\,{}^tA$ **6.** $3(A-2B)$

Solution.

1. $A+B = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 9 \end{pmatrix}$.

2. $2A-B = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 4 & 10 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$.

3. $AB = \begin{pmatrix} 2+0 & 2+12 \\ 4+0 & 4+20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 14 \\ 4 & 24 \end{pmatrix}$.

4. $BA = \begin{pmatrix} 2+4 & 6+10 \\ 0+8 & 0+20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 16 \\ 8 & 20 \end{pmatrix}$.

5. Première méthode : ${}^tB\,{}^tA = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+0 & 4+0 \\ 2+12 & 4+20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 14 & 24 \end{pmatrix}$

Seconde méthode : ${}^tB\,{}^tA = {}^t(AB) = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 14 & 24 \end{pmatrix}$

6. $3(A-2B) = 3\left[\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}\right] = 3\begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 & -3 \\ 6 & -9 \end{pmatrix}$.

Exercice 2. On considère les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 7 & -2 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad E = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Calculer :

1. A^2 **2.** A^3 **3.** BE **4.** EB **5.** AE **6.** BA **7.** D^2 **8.** DC **9.** ${}^tBB$.

Solution.

1. $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 \\ 3 & 3 & 4 \\ 9 & -7 & 3 \end{pmatrix}$.

2. $A^3 = A^2A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 \\ 3 & 3 & 4 \\ 9 & -7 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -6 & -5 \\ 15 & -1 & 11 \\ 18 & -26 & -1 \end{pmatrix}$

3. $BE = \begin{pmatrix} 1 & 7 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 \end{pmatrix}$.

4. $EB = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 7 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 7 & -2 \\ 2 & 14 & -4 \\ -1 & -7 & 2 \end{pmatrix}$

5. $AE = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$

6. $BA = \begin{pmatrix} 1 & 7 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 15 & 3 \end{pmatrix}$

7. $D^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$

8. $DC = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 3 & -1 & 1 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

9. ${}^tBB = \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 7 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 7 & -2 \\ 7 & 49 & -14 \\ -2 & -14 & 4 \end{pmatrix}$

Exercice 3. On considère les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer A^2, B^2 et C^2.

2. Calculer A^3, B^3 et C^3.

3. Calculer A^4, B^4 et C^4.

4. Conjecturer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, une expression explicite de A^n, B^n et C^n en fonction de n. (On ne demande pas de démontrer ces conjectures.)

Solution.

1. $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$B^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}$

$C^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} = 3C$

2. $A^3 = A^2A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$B^3 = B^2B = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 0 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 19 \\ 0 & 27 \end{pmatrix}$

$C^3 = C^2C = (3C)C = 3C^2 = 3(3C) = 9C$

3. $A^4 = A^3A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$B^4 = B^3B = \begin{pmatrix} 8 & 19 \\ 0 & 27 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 & 65 \\ 0 & 81 \end{pmatrix}$

$C^4 = C^3C = (9C)C = 9C^2 = 9(3C) = 27C$

4. On peut conjecturer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $A^n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B^n = \begin{pmatrix} 2^n & 3^n - 2^n \\ 0 & 3^n \end{pmatrix}$ et $C^n = 3^{n-1}C$.

Exercice 4. Pour chacune des matrices suivantes, déterminer si elle est inversible ou non. Lorsqu'elle est inversible, déterminer son inverse et, lorsqu'elle ne l'est pas, déterminer son rang.

$$A = \begin{pmatrix} \pi & e \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1+\mathrm{i} & 2-\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & -\mathrm{i} \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} \pi & \pi & 2\pi \\ \pi & 0 & 0 \\ -\pi & -2\pi & 0 \end{pmatrix} \qquad E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & -3 \\ 4 & 2 & 2 \end{pmatrix} \qquad F = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & -1 \end{pmatrix} \qquad H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 & 4 \\ 7 & 2 & 2 & 9 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \qquad J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Solution.

$\det(A) = 2\pi - 2e \neq 0$ donc A est inversible et $A^{-1} = \dfrac{1}{2\pi - 2e}\begin{pmatrix} 2 & -e \\ -2 & \pi \end{pmatrix}$.

$\det(B) = (1+\mathrm{i})(-\mathrm{i}) - \mathrm{i}(2-\mathrm{i}) = -\mathrm{i} + 1 - 2\mathrm{i} - 1 = -3\mathrm{i} \neq 0$ donc B est inversible et $B^{-1} = \dfrac{1}{-3\mathrm{i}}\begin{pmatrix} -\mathrm{i} & -2+\mathrm{i} \\ -\mathrm{i} & 1+\mathrm{i} \end{pmatrix}$.

Soit a, b et c trois réels. On considère le système suivant associé à C :

$$(S_C) \begin{cases} x - y = a & L_1 \\ 2y + z = b & L_2 \\ 3x - y + 2z = c & L_3 \end{cases}.$$

Alors,

$$(S_C) \iff \begin{cases} x - y = a & L_1 \\ 2y + z = b & L_2 \\ 2y + 2z = c - 3a & L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1 \end{cases} \iff \begin{cases} x - y = a & L_1 \\ 2y + z = b & L_2 \\ z = -3a - b + c & L_3 \leftarrow L_3 - L_2 \end{cases}$$

Le système échelonné possède 3 pivots donc C est inversible. De plus,

$$(S_C) \iff \begin{cases} x = a + y \\ 2y - 3a - b + c = b \\ z = -3a - b + c \end{cases} \iff \begin{cases} x = \frac{5}{2}a + b - \frac{1}{2}c \\ y = \frac{3}{2}a + b - \frac{1}{2}c \\ z = -3a - b + c \end{cases}$$

donc $C^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ -3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

On peut remarquer que $D = \pi D'$ où $D' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$.

Soit a, b et c trois réels. On considère le système suivant associé à D' :

$$(S_{D'}) \begin{cases} x + y + 2z = a & L_1 \\ x = b & L_2 \\ -x - 2y = c & L_3 \end{cases}.$$

Alors,

$$(S_{D'} \iff \begin{cases} x = b & L_1 \leftrightarrow L_2 \\ x + y + 2z = a & L_2 \leftrightarrow L_1 \\ -x - 2y = c & L_3 \end{cases} \iff \begin{cases} x = b \\ y + 2z = a - b & L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ -2y = b + c & L_3 \leftarrow L_3 + L_1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = b \\ y + 2z = a - b & L_2 \\ 4z = 2a - b + c & L_3 \leftarrow L_3 + 2L_2 \end{cases}$$

Le système échelonné possède 3 pivots donc D' est inversible. De plus,

$$(S_{D'}) \iff \begin{cases} x = b \\ y + a - \frac{1}{2}b + \frac{1}{2}c = a - b \\ z = \frac{1}{2}a - \frac{1}{4}b + \frac{1}{4}c \end{cases} \iff \begin{cases} x = b \\ y = -\frac{1}{2}b - \frac{1}{2}c \\ z = \frac{1}{2}a - \frac{1}{4}b + \frac{1}{4}c \end{cases}$$

Ainsi, $D'^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$ donc $D^{-1} = \frac{1}{\pi} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\pi} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2\pi} & -\frac{1}{2\pi} \\ \frac{1}{2\pi} & -\frac{1}{4\pi} & \frac{1}{4\pi} \end{pmatrix}$

Soit a, b et c trois réels. On considère le système suivant associé à E :

$$(S_E) \begin{cases} x + 2z = a & L_1 \\ 2x + y - 3z = b & L_2 \\ 4x + 2y + 2z = c & L_3 \end{cases}.$$

Alors,

$$(S_E) \iff \begin{cases} x + 2z = a & L_1 \\ y - 7z = b - 2a & L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ 2y - 6z = c - 4a & L_3 \leftarrow L_3 - 4L_1 \end{cases} \iff \begin{cases} x + 2z = a & L_1 \\ y - 7z = b - 2a & L_2 \\ 8z = -2b + c & L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2 \end{cases}$$

Le système échelonné possède 3 pivots donc E est inversible. De plus,

$$(S_E) \iff \begin{cases} x + 2(-\frac{1}{4}b + \frac{1}{8}c) = a \\ y - 7(-\frac{1}{4}b + \frac{1}{8}c) = b - 2a \\ z = -\frac{1}{4}b + \frac{1}{8}c \end{cases} \iff \begin{cases} x = a + \frac{1}{2}b - \frac{1}{4}c \\ y = -2a - \frac{3}{4}b + \frac{7}{8}c \\ z = -\frac{1}{4}b + \frac{1}{8}c \end{cases}$$

donc $E^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ -2 & -\frac{3}{4} & \frac{7}{8} \\ 0 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{8} \end{pmatrix}$.

Soit a, b et c trois réels. On considère le système suivant associé à F :

$$(S_F) \begin{cases} 2y + z = a & L_1 \\ 2x + z = b & L_2 \\ x + 2y = c & L_3 \end{cases}.$$

Alors,

$$(S_F) \iff \begin{cases} x + 2y = c & L_1 \leftrightarrow L_3 \\ 2x + z = b & L_2 \\ 2y + z = a & L_3 \leftrightarrow L_1 \end{cases} \iff \begin{cases} x + 2y = c & L_1 \\ -4y + z = b - 2c & L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ 2y + z = a & L_3 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x + 2y = c & L_1 \\ 2y + z = a & L_3 \leftrightarrow L_3 \\ -4y + z = b - 2c & L_3 \leftrightarrow L_2 \end{cases} \iff \begin{cases} x + 2y = c & L_1 \\ 2y + z = a & L_3 \\ 3z = 2a + b - 2c & L_3 \leftrightarrow L_3 + 2L_2 \end{cases}$$

Le système échelonné possède 3 pivots donc F est inversible. De plus,

$$(S_F) \iff \begin{cases} x + 2y = c \\ 2y + \frac{2}{3}a + \frac{1}{3}b - \frac{2}{3}c = a \\ z = \frac{2}{3}a + \frac{1}{3}b - \frac{2}{3}c \end{cases} \iff \begin{cases} x + 2(\frac{1}{6}a - \frac{1}{6}b + \frac{1}{3}c) = c \\ y = \frac{1}{6}a - \frac{1}{6}b + \frac{1}{3}c \\ z = \frac{2}{3}a + \frac{1}{3}b - \frac{2}{3}c \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = -\frac{1}{3}a + \frac{1}{3}b + \frac{1}{3}c \\ y = \frac{1}{6}a - \frac{1}{6}b + \frac{1}{3}c \\ z = \frac{2}{3}a + \frac{1}{3}b - \frac{2}{3}c \end{cases}$$

Ainsi, $F^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{6} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$.

Soit a, b, c et d quatre réels. On considère le système suivant associé à G :

$$(S_G) \begin{cases} x + z - t = a & L_1 \\ 2x + y + 3z - t = b & L_2 \\ x + y + z + t = c & L_3 \\ 2y + 3z - t = d & L_4 \end{cases}.$$

Alors,

$$(S_G) \iff \begin{cases} x + z - t = a & L_1 \\ y + z + t = b - 2a & L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ y + 2t = c - a & L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \\ 2y + 3z - t = d & L_4 \end{cases} \iff \begin{cases} x + z - t = a & L_1 \\ y + z + t = b - 2a & L_2 \\ -z + t = a - b + c & L_3 \leftarrow L_3 - L_2 \\ z - 3t = 4a - 2b + d & L_4 \leftarrow L_4 - 2L_2 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x + z - t = a & L_1 \\ y + z + t = b - 2a & L_2 \\ -z + t = a - b + c & L_3 \leftarrow L_3 - L_2 \\ -2t = 5a - 3b + c + d & L_4 \leftarrow L_4 + L_3 \end{cases}$$

Le système échelonné possède 4 pivots donc G est inversible. De plus,

$$(S_G) \iff \begin{cases} x+z-(-\frac{5}{2}a+\frac{3}{2}b-\frac{1}{2}c-\frac{1}{2}d)=a \\ y+z-\frac{5}{2}a+\frac{3}{2}b-\frac{1}{2}c-\frac{1}{2}d=b-2a \\ -z-\frac{5}{2}a+\frac{3}{2}b-\frac{1}{2}c-\frac{1}{2}d=a-b+c \\ t=-\frac{5}{2}a+\frac{3}{2}b-\frac{1}{2}c-\frac{1}{2}d \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x+(-\frac{7}{2}a+\frac{5}{2}b-\frac{3}{2}c-\frac{1}{2}d)=-\frac{3}{2}a+\frac{3}{2}b-\frac{1}{2}c-\frac{1}{2}d \\ y-\frac{7}{2}a+\frac{5}{2}b-\frac{3}{2}c-\frac{1}{2}d=\frac{1}{2}a-\frac{1}{2}b+\frac{1}{2}c+\frac{1}{2}d \\ z=-\frac{7}{2}a+\frac{5}{2}b-\frac{3}{2}c-\frac{1}{2}d \\ t=-\frac{5}{2}a+\frac{3}{2}b-\frac{1}{2}c-\frac{1}{2}d \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x=2a-b+c \\ y=4a-3b+2c+d \\ z=-\frac{7}{2}a+\frac{5}{2}b-\frac{3}{2}c-\frac{1}{2}d \\ t=-\frac{5}{2}a+\frac{3}{2}b-\frac{1}{2}c-\frac{1}{2}d \end{cases}$$

donc $G^{-1}=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 4 & -3 & 2 & 1 \\ -\frac{7}{2} & \frac{5}{2} & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{5}{2} & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

Soit a, b, c et d quatre réels. On considère le système suivant associé à H :

$$(S_H) \begin{cases} x+2z+3t=a & L_1 \\ 2x+2y+z+4t=b & L_2 \\ 7x+2y+2z+9t=c & L_3 \\ x-y-z-t=d & L_4 \end{cases}.$$

Alors,

$$(S_H) \iff \begin{cases} x+2z+3t=a & L_1 \\ 2y-3z-2t=b-2a & L_2 \leftarrow L_2-2L_1 \\ 2y-12z-12t=c-7a & L_3 \leftarrow L_3-7L_1 \\ -y-3z-4t=d-a & L_4 \leftarrow L_4-L_1 \end{cases} \iff \begin{cases} x+2z+3t=a & L_1 \\ -y-3z-4t=d-a & L_2 \leftrightarrow L_4 \\ 2y-12z-12t=c-7a & L_3 \\ 2y-3z-2t=b-2a & L_4 \leftrightarrow L_2 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x+2z+3t=a & L_1 \\ -y-3z-4t=d-a & L_2 \\ -18z-20t=-9a+c+2d & L_3 \leftarrow L_3+2L_2 \\ -9z-10t=-4a+b+2d & L_4 \leftarrow L_4+2L_2 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x+2z+3t=a & L_1 \\ -y-3z-4t=d-a & L_2 \\ -9z-10t=-4a+b+2d & L_3 \leftrightarrow L_4 \\ -18z-20t=-9a+c+2d & L_4 \leftrightarrow L_3 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x+2z+3t=a & L_1 \\ -y-3z-4t=d-a & L_2 \\ -9z-10t=-4a+b+d & L_3 \\ 0=-a-2b+c-2d & L_4 \leftarrow L_4-2L_3 \end{cases}$$

Le système échelonné possède 3 pivots donc G est n'est pas inversible et $\text{rg}(G) = 3$.

Soit a, b, c et d quatre réels. On considère le système suivant associé à J :

$$(S_J) \begin{cases} x + y - z - t = a & L_1 \\ -x + y + z + t = b & L_2 \\ -x - y - z + t = c & L_3 \\ -x - y - z - t = d & L_4 \end{cases}.$$

Alors,

$$(S_H) \iff \begin{cases} x + y - z - t = a & L_1 \\ 2y = b + a & L_2 \leftarrow L_2 + L_1 \\ -2z = c + a & L_3 \leftarrow L_3 + L_1 \\ -2z - 2t = d + a & L_4 \leftarrow L_4 + L_1 \end{cases} \iff \begin{cases} x + y - z - t = a & L_1 \\ 2y = b + a & L_2 \leftarrow L_2 + L_1 \\ -2z = c + a & L_3 \leftarrow L_3 + L_1 \\ -2t = d - c & L_4 \leftarrow L_4 - L_3 \end{cases}$$

Le système échelonné possède 4 pivots donc J est n'est pas inversible et $\text{rg}(G) = 3$. De plus,

$$(S_J) \iff \begin{cases} x + (\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b) - (-\frac{1}{2}a - \frac{1}{2}c) - (\frac{1}{2}c - \frac{1}{2}d) = a \\ y = \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b \\ z = -\frac{1}{2}a - \frac{1}{2}c \\ t = \frac{1}{2}c - \frac{1}{2}d \end{cases} \iff \begin{cases} x = -\frac{1}{2}b - \frac{1}{2}d \\ y = \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b \\ z = -\frac{1}{2}a - \frac{1}{2}c \\ t = \frac{1}{2}c - \frac{1}{2}d \end{cases}$$

donc $J^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$.