

Feuille de calcul n°20 — Calcul matriciel

Exercice 1. On considère les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 7 & -4 \end{pmatrix}.$$

Calculer :

$$1. A + B \quad 2. 2A - B \quad 3. AB \quad 4. BA \quad 5. {}^tB {}^tA \quad 6. 3(A - 2B)$$

Exercice 2. On considère les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 7 & -2 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad E = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Calculer :

$$1. A^2 \quad 2. A^3 \quad 3. BE \quad 4. EB \quad 5. AE \quad 6. BA \quad 7. D^2 \quad 8. DC \quad 9. {}^tBB.$$

Exercice 3. On considère les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

- Calculer A^2 , B^2 et C^2 .
- Calculer A^3 , B^3 et C^3 .
- Calculer A^4 , B^4 et C^4 .
- Conjecturer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, une expression explicite de A^n , B^n et C^n en fonction de n . (On ne demande pas de démontrer ces conjectures.)

Exercice 4. Pour chacune des matrices suivantes, déterminer si elle est inversible ou non. Lorsqu'elle est inversible, déterminer son inverse et, lorsqu'elle ne l'est pas, déterminer son rang.

$$A = \begin{pmatrix} \pi & e \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1+i & 2-i \\ i & -i \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} \pi & \pi & 2\pi \\ \pi & 0 & 0 \\ -\pi & -2\pi & 0 \end{pmatrix} \quad E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & -3 \\ 4 & 2 & 2 \end{pmatrix} \quad F = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & -1 \end{pmatrix} \quad H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 & 4 \\ 7 & 2 & 2 & 9 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \quad J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$