Feuille de calcul n°19 — Systèmes linéaires

Exercice 1. Résoudre chacun des systèmes suivants en utilisant la méthode qui vous semble la plus adaptée.

$$(S_1)\begin{cases}3x-2y=1\\ y=1\end{cases}\qquad (S_2)\begin{cases}3x+2y=-1\\ 3x-4y=11\end{cases}\qquad (S_3)\begin{cases}-5x+2y=3\\ 10x-4y=5\end{cases}\qquad (S_4)\begin{cases}\frac{2}{3}x+y=1\\ 2x+3y=3\end{cases}$$

Solution.

$$(S_1)\iff\begin{cases}3x-2\times 1=1\\ y=1\end{cases}\iff\begin{cases}3x=3\\ y=1\end{cases}\iff\begin{cases}x=1\\ y=1\end{cases}$$

donc l'unique solution de (S_1) est $(1\,;1)$.

$$(S_2)\iff\begin{cases}9x=9 & L_1\leftarrow 2L_1+L_2\\ 6y=-12 & L_2\leftarrow L_1-L_2\end{cases}\iff\begin{cases}x=1\\ y=-2\end{cases}$$

donc l'unique solution de (S_2) est $(1\,;-2)$.

$$(S_3)\iff\begin{cases}0=11 & L_1\leftarrow 2L_1+L_2\\ -3x+6y=1\end{cases}$$

On aboutit à un système incompatible donc l'ensemble des solutions de (S_3) est $\varnothing$.

$$(S_4)\iff\begin{cases}2x+3y=3=4 & L_1\leftarrow 3L_1\\ 2x+3y=3\end{cases}\Leftrightarrow y=-\frac{2}{3}x+1$$

Ainsi, l'ensemble des solutions de (S_4) est $\{(x,-\frac{2}{3}y+1)\mid x\in\mathbb{R}\}$.

Exercice 2. Résoudre chacun des systèmes suivants.

$$(S_1)\begin{cases}-x+2y+3z=2\\ \quad -y+2z=1\\ \quad 5z=7\end{cases}\qquad (S_2)\begin{cases}2x+y-3z=7\\ \quad -2z=4\end{cases}\qquad (S_3)\begin{cases}7x-y+8z=12\\ \quad -6y+7z=-5\\ \quad 0=12\end{cases}$$

Solution.

$$(S_1)\iff\begin{cases}-x+2y+3\times\frac{7}{5}=2\\ -y+2\times\frac{7}{5}=1\\ z=\frac{7}{5}\end{cases}\iff\begin{cases}-x+2y=2-\frac{21}{5}\\ y=\frac{9}{5}\\ z=\frac{7}{5}\end{cases}\iff\begin{cases}-x=-\frac{11}{5}-\frac{18}{5}\\ y=\frac{9}{5}\\ z=\frac{7}{5}\end{cases}\iff\begin{cases}x=\frac{29}{5}\\ y=\frac{9}{5}\\ z=\frac{7}{5}\end{cases}$$

Ainsi, l'unique solution de (S_2) est $\left(\frac{29}{5}\,;\frac{9}{5}\,;\frac{7}{5}\right)$.

$$(S_2) \iff \begin{cases} 2x+y+6=7 \\ \qquad\qquad z=-2 \end{cases} \iff \begin{cases} y=-2y+1 \\ z=-2 \end{cases}$$

Ainsi, l'ensemble des solutions de (S_2) est $\{(x\,;-2y+1\,;-2) \mid y \in \mathbb{R}\}$.

L'ensemble des solutions de (S_3) est vide en raison de la dernière équation.

Exercice 3. Échelonner puis résoudre les systèmes linéaires suivants.

$$(S_1)\begin{cases} -3x+4y=5 \\ x-3y=8 \end{cases} \qquad (S_2)\begin{cases} x+y+z=0 \\ 2x-3y-4z=1 \\ 3x+2y-2z=4 \end{cases} \qquad (S_3)\begin{cases} x+z=2 \\ x+y=1 \\ y+z=3 \end{cases}$$

Solution.

$$(S_1)\begin{cases} -3x+4y=5 & L_1 \\ x-3y=8 & L_2 \end{cases} \iff \begin{cases} x-3y=8 & L_1 \leftrightarrow L_2 \\ -3x+4y=5 & L_2 \leftrightarrow L_1 \end{cases} \iff \begin{cases} x-3y=8 \\ \quad -5y=29 & L_2 \leftarrow L_2+3L_1 \end{cases}$$

et on en déduit que

$$(S_1) \iff \begin{cases} x-3(-\frac{29}{5})=8 \\ \qquad y=-\frac{29}{5} \end{cases} \iff \begin{cases} x=-\frac{47}{5} \\ y=-\frac{29}{5} \end{cases}$$

Ainsi, l'unique solution de (S_1) est $\left(-\frac{47}{5}\,;-\frac{29}{5}\right)$.

$$\begin{aligned}
(S_2)\begin{cases} x+y+z=0 & L_1 \\ 2x-3y-4z=1 & L_2 \\ 3x+2y-2z=4 & L_3 \end{cases} &\iff \begin{cases} x+y+z=0 & L_1 \\ -5y-6z=1 & L_2 \leftarrow L_2-2L_1 \\ -y-5z=4 & L_3 \leftarrow L_3-3L_1 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} x+y+z=0 & L_1 \\ -5y-6z=1 & L_2 \leftarrow L_2-2L_1 \\ y+5z=-4 & L_3 \leftarrow -L_3 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} x+y+z=0 & L_1 \\ y+5z=-4 & L_2 \leftarrow L_2 \leftrightarrow L_3 \\ -5y-6z=1 & L_3 \leftrightarrow L_2 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} x+y+z=0 & L_1 \\ y+5z=-4 & L_2 \leftarrow L_2 \leftrightarrow L_3 \\ 19z=-19 & L_3 \leftarrow L_3+5L_2 \end{cases}
\end{aligned}$$

On en déduit que

$$(S_2) \iff \begin{cases} x+y-1=0 \\ \quad y-5=-4 \\ \qquad z=-1 \end{cases} \iff \begin{cases} x+1=1 \\ \quad y=1 \\ \quad z=-1 \end{cases} \iff \begin{cases} x=0 \\ y=1 \\ z=-1 \end{cases}$$

Ainsi, l'unique solution de (S_2) est $(0\,;1\,;-1)$.

$$(S_3)\begin{cases} x \quad\; + z = 2 & L_1 \\ x + y \quad\;\; = 1 & L_2 \\ \quad\;\; y + z = 3 & L_3 \end{cases} \iff \begin{cases} x \quad\; + z = 2 & L_1 \\ \quad\; y - z = -1 & L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ \quad\; y + z = 3 & L_3 \end{cases} \iff \begin{cases} x \quad\; + z = 2 & L_1 \\ \quad\; y - z = -1 & L_2 \\ \qquad\; 2z = 4 & L_3 \leftarrow L_3 - L_2 \end{cases}$$

On en déduit que

$$(S_3) \iff \begin{cases} x + 2 = 2 \\ y - 2 = -1 \\ z = 2 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \\ z = 2 \end{cases}$$

Ainsi, l'unique solution de (S_3) est $(0\,;1\,;2)$.

Exercice 4. Échelonner puis résoudre les systèmes suivants.

$$(S_1)\begin{cases} x + 2y + 3z = 6 \\ x - 2y + 3z = 2 \\ 3x + y - 2z = 2 \end{cases} \qquad (S_2)\begin{cases} -2x + y + 2z = 3 \\ x + 2y - 3z = 5 \\ x + 7y - 7z = 12 \end{cases} \qquad (S_3)\begin{cases} 5x - 2y + z = 1 \\ 2x + 3y - z = 2 \\ 2x - 16y + 6z = -6 \end{cases}$$

Solution.

$$(S_1)\begin{cases} x + 2y + 3z = 6 & L_1 \\ x - 2y + 3z = 2 & L_2 \\ 3x + y - 2z = 2 & L_3 \end{cases} \iff \begin{cases} x + 2y + 3z = 6 & L_1 \\ \quad -4y \qquad = -4 & L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ \quad -5y - 11z = -16 & L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x + 2y + 3z = 6 & L_1 \\ \qquad y \qquad = 1 & L_2 \leftarrow -\frac{1}{4}L_2 \\ \quad -5y - 11z = -16 & L_3 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x + 2y + 3z = 6 & L_1 \\ \qquad y \qquad = 1 & L_2 \\ \qquad -11z = -11 & L_3 \leftarrow L_3 + 5L_2 \end{cases}$$

On en déduit que

$$(S_1) \iff \begin{cases} x + 2 + 3 = 6 \\ y = 1 \\ z = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \\ z = 1 \end{cases}$$

Ainsi, l'unique solution de (S_1) est $(1\,;1\,;1)$.

$$(S_2)\begin{cases}-2x+y+2z=3 & L_1\\ x+2y-3z=5 & L_2\\ x+7y-7z=12 & L_3\end{cases}\iff\begin{cases}x+2y-3z=5 & L_1\leftrightarrow L_2\\ -2x+y+2z=3 & L_2\leftrightarrow L_1\\ x+7y-7z=12 & L_3\end{cases}$$

$$\iff\begin{cases}x+2y-3z=5 & L_1\\ \quad 5y-4z=13 & L_2\leftarrow L_2+2L_1\\ \quad 5y-4z=7 & L_3\leftarrow L_3-L_1\end{cases}$$

$$\iff\begin{cases}x+2y-3z=5 & L_1\\ \quad 5y-4z=13 & L_2\\ \qquad 0=-6 & L_3\leftarrow L_3-L_2\end{cases}$$

La dernière équation étant toujours fausse, l'ensemble des solutions de (S_2) est vide.

$$(S_3)\begin{cases}5x-2y+z=1 & L_1\\ 2x+3y-z=2 & L_2\\ 2x-16y+6z=-6 & L_3\end{cases}\iff\begin{cases}2x-16y+6z=-6 & L_1\leftrightarrow L_3\\ 2x+3y-z=2 & L_2\\ 5x-2y+z=1 & L_3\leftrightarrow L_1\end{cases}$$

$$\iff\begin{cases}x-8y+3z=-3 & L_1\leftarrow \frac{1}{2}L_1\\ 2x+3y-z=2 & L_2\\ 5x-2y+z=1 & L_3\end{cases}$$

$$\iff\begin{cases}x-8y+3z=-3 & L_1\leftarrow L_1\\ \quad 19y-7z=8 & L_2\leftarrow L_2-2L_1\\ \quad 38y-14z=16 & L_3\leftarrow L_3-5L_1\end{cases}$$

$$\iff\begin{cases}x-8y+3z=-3 & L_1\leftarrow L_1\\ \quad 19y-7z=8 & L_2\leftarrow L_2-2L_1\\ \quad 0=0 & L_3\leftarrow L_3-2L_2\end{cases}$$

On en déduit que

$$(S_3)\iff\begin{cases}x-8y+3z=-3\\ \quad 19y-7z=8\end{cases}\iff\begin{cases}x-8y+3(\frac{19}{7}y-\frac{8}{7})=-3\\ z=\frac{19}{7}y-\frac{8}{7}\end{cases}\iff\begin{cases}x=-\frac{1}{7}y+\frac{3}{7}\\ z=\frac{19}{7}y-\frac{8}{7}\end{cases}$$

Ainsi, l'ensemble des solutions de (S_2) est $\left\{\left(-\frac{1}{7}y+\frac{3}{7}\,;y\,;\frac{19}{7}y-\frac{8}{7}\right)\mid z\in\mathbb{R}\right\}$.

Exercice 5. Déterminer le rang et le nombre de solutions des systèmes suivants.

$$(S_1)\begin{cases}x-3y+2z=-1\\ 2x-2y+5z=5\\ -3x+4y+7z=1\end{cases}\qquad (S_2)\begin{cases}2x-y+3z=1\\ x+\frac{3}{4}y-z=1\\ 2x+4y-7z=12\end{cases}\qquad (S_3)\begin{cases}x+2y-3z=6\\ \sqrt{2}x+\sqrt{8}y-\sqrt{18}z=6\sqrt{2}\\ \frac{\pi}{6}x+\frac{\pi}{3}y-\frac{\pi}{2}z=\pi\end{cases}$$

Solution.

$$(S_1)\begin{cases} x-3y+2z=-1 & L_1\\ 2x-2y+5z=5 & L_2\\ -3x+4y+7z=1 & L_3\end{cases} \iff \begin{cases} x-3y+2z=-1 & L_1\\ 4y+z=7 & L_2\leftarrow L_2-2L_1\\ -5y+13z=-2 & L_3\leftarrow L_3+3L_1\end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x-3y+2z=-1 & L_1\\ 4y+z=7 & L_2\\ \frac{57}{4}z=\frac{27}{4} & L_3\leftarrow L_3+\frac{5}{4}L_2\end{cases}$$

Il y a 3 pivots (1, 45, et $\frac{57}{4}$) donc $\mathrm{rg}(S_1)=3$. On en déduit que (S_1) est un système de Cramer donc il admet exactement une solution.

$$(S_2)\begin{cases} 2x-y+3z=1 & L_1\\ x+\frac{3}{4}y-z=1 & L_2\\ 2x+4y-7z=12 & L_3\end{cases} \iff \begin{cases} 2x-y+3z=1 & L_1\\ 4x+3y-4z=4 & L_2\leftarrow 4L_2\\ 2x+4y-7z=12 & L_3\end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 2x-y+3z=1 & L_1\\ 5y-10z=2 & L_2\leftarrow L_2-2L_1\\ 5y-10z=11 & L_3\leftarrow L_3-L_1\end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 2x-y+3z=1 & L_1\\ 5y-10z=2 & L_2\\ 0=9 & L_3\leftarrow L_3-L_2\end{cases}$$

Il y a 2 pivots (2 et 5) donc $\mathrm{rg}(S_2)=2$. Comme la dernière équation de compatibilité est fausse, on en déduit que le système n'a pas de solution.

$$(S_3)\begin{cases} x+2y-3z=6 & L_1\\ \sqrt{2}x+\sqrt{8}y-\sqrt{18}z=6\sqrt{2} & L_2\\ \frac{\pi}{6}x+\frac{\pi}{3}y-\frac{\pi}{2}z=\pi & L_3\end{cases} \iff \begin{cases} x+2y-3z=6 & L_1\\ 0=0 & L_2\leftarrow L_2-\sqrt{2}L_1\\ 0=0 & L_3\leftarrow L_3-\frac{\pi}{6}L_1\end{cases}$$

Il y a 1 seul pivot (1) donc $\mathrm{rg}(S_3)=1$. De plus, les deux équations de compatibilité sont vraies donc (S_3) a une infinité de solutions.